

# Schwache Zerfälle schwerer Mesonen

**Tobias Kretz**

*Diplomarbeit*

an der Fakultät für Physik  
der  
Universität Karlsruhe (TH)

Referent: Prof. Dr. J. H. Kühn  
Institut für Theoretische Teilchenphysik (TTP)

Korreferent: Prof. Dr. Th. Mannel  
Institut für Theoretische Teilchenphysik (TTP)

Juli 2003



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Das Standardmodell der Elementarteilchen . . . . .                   | 1         |
| 1.1.1    | Wozu ein „Standardmodell“? . . . . .                                 | 1         |
| 1.1.2    | Kurzbeschreibung des Standardmodells der Elementarteilchen . . . . . | 3         |
| 1.1.3    | Grenzen und mögliche Erweiterungen . . . . .                         | 6         |
| 1.2      | Motivation und Aufgabenstellung . . . . .                            | 7         |
| 1.2.1    | Schwere Mesonen . . . . .  | 7         |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1      | Doppelt schwere Mesonen . . . . .                                    | 9         |
| 2.1.1    | Der Projektionsformalismus für asymmetrische Systeme . . . . .       | 9         |
| 2.1.2    | $\phi(0)$ . . . . .  | 14        |
| 2.2      | Bisherige experimentelle Ergebnisse . . . . .                        | 17        |
| 2.3      | Vorbemerkungen zu den Rechnungen . . . . .                           | 17        |
| <b>3</b> | <b>Prozesse</b>  | <b>19</b> |
| 3.1      | Spectatormodell . . . . .  | 19        |
| 3.1.1    | Masselose Endzustände . . . . .                                      | 20        |
| 3.1.2    | Massive Endzustände . . . . .  | 22        |
| 3.2      | Annihilationszerfall . . . . .                                       | 25        |
| 3.2.1    | Masseloser Endzustand . . . . .                                      | 25        |
| 3.2.2    | Massiver Endzustand . . . . .  | 25        |
| 3.2.3    | QED-Korrekturen zur Annihilation mit masselosem Endzustand . . . . . | 28        |
| 3.3      | Der Strahlungsübergang $B_c^* (^3S_1)$ nach $B_c (^1S_0)$ . . . . .  | 32        |
| 3.4      | Der Zerfall $B_c \rightarrow \eta_c l \nu_l$ . . . . .               | 43        |
| <b>A</b> | <b>Phasenraumintegration</b>   | <b>71</b> |
| A.1      | Eins nach Zwei . . . . .   | 71        |
| A.2      | Eins nach Drei . . . . .   | 72        |

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>B Potentiale und Wellenfunktionen</b> | <b>79</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>              | <b>87</b> |
| <b>Danksagungen</b>                      | <b>90</b> |

---

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Das Standardmodell der Elementarteilchen

#### 1.1.1 Wozu ein „Standardmodell“?

Aufgabe der Physik ist, beobachtete Phänomene mathematisch zu quantifizieren (Beschreibung) und verschiedene Phänomene miteinander in Beziehung zu setzen (Vereinheitlichung). Ergibt sich im letzteren Teil ein Fortschritt, so wird dies allgemein als vertieftes Verständnis der betroffenen Teilgebiete betrachtet.

Der beschreibende Teil der Physik ist viel älter als der vereinheitlichende und reicht in Europa zurück bis zu einzelnen antiken Philosophen. Die bis heute ununterbrochen andauernde Tradition begann jedoch erst mit Nikolaus Kopernikus, Tycho Brahe und Galileo Galilei.

Die erste Vereinheitlichung im eigentlichen Sinn machte im 17. Jh. Isaac Newton, der zeigen konnte, dass die Gesetze der Planetenbewegung und die Fallgesetze auf der Oberfläche der Erde eine universelle Gravitation als Ursprung haben. [1]

Gut zweihundert Jahre später gelang es James C. Maxwell mit den nach ihm benannten Gleichungen eine Theorie aufzustellen, die im Alltag als sehr unterschiedlich erfahrene Phänomene wie Elektrostatik, Elektrodynamik, Magnetostatik, Magnetodynamik und schlichtweg Licht als verschiedene Aspekte ein und derselben Wechselwirkung beschrieb. [2]

Maxwells Theorie beschreibt Licht als Welle. Einige Jahre später aber katalysierten Experimente, in denen die Teilchennatur des Lichtes zu Tage tritt,

---

die Entstehung der Quantenmechanik. [3]

Dies war ebenso eine neuartige Beschreibung der mikroskopischen Welt, wie es die spezielle Relativitätstheorie Albert Einsteins für die makroskopische Welt war. [4]

Relativistische Formulierungen der Quantenmechanik und die Erkenntnis, dass nicht nur das Photonfeld quantisiert, sondern auch bis dahin nur als Teilchen bekannten Phänomenen Felder zugeordnet werden können, führten zur Entstehung der Quantenfeldtheorie.

Hochpräzise Messungen auf Elementarteilchenniveau führten zur Entdeckung einer Vielzahl neuer Teilchen sowie zweier weiterer elementarer Wechselwirkungen (die „starke“ und die „schwache“ Kraft).

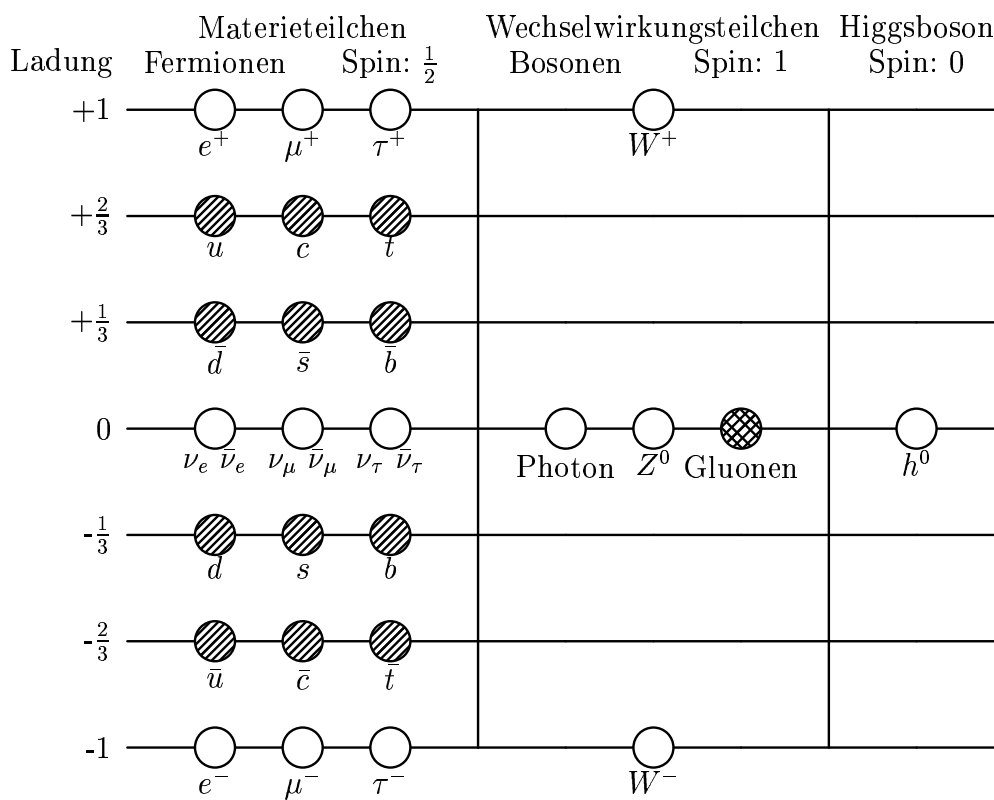
Und so ist das Standardmodell der Elementarteilchenphysik der heutige Stand von Beschreibung und Vereinheitlichung aller Beobachtungen auf Elementarteilchenniveau mit Ausnahme der Gravitation.

---

### 1.1.2 Kurzbeschreibung des Standardmodells der Elementarteilchen

Das Standardmodell der Teilchenphysik (siehe dazu beispielsweise auch die Referenzen [5, 6, 7]) beschreibt alle bis dato beobachteten Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation.

#### Überblick über die Teilchen des Standardmodells



In diesem Überblick, der wie alle Graphen in dieser Arbeit mit Hilfe von „Feynmf“ [8] gezeichnet wurde, sind die Elementarteilchenfamilien in aufsteigender Massenfolge und die Wechselwirkungsteilchen nach den Kräften, die sie vermitteln, jeweils spaltenweise dargestellt. Die schraffierten Quarks tragen eine von drei Farb- oder Anti-Farbladungen und wechselwirken damit stark. Gluonen als Austauschpartikel der starken Wechselwirkung tragen jeweils eine Farbladung und eine Anti-Farbladung. (Genauer: Kombinationen aus Farb-Anti-Farb Eigenzuständen.)

**Die elektroschwache Wechselwirkung** lässt sich als spontan gebrochene  $SU(2) \otimes U(1)$  Eichtheorie beschreiben [9, 10, 11, 12]. Die Wechselwirkungsteilchen, die  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen, erhalten ihre Massen durch den bei der Symmetriebrechung auftretenden Vakuumerwartungswert eines Skalarfeldes mit den genannten ( $SU(2) \otimes U(1)$ ) Transformationseigenschaften im Spinorraum. Das Photon bleibt als Kombination ungebrochener Symmetriegeneratoren masselos. (Photon und  $Z^0$  sind Mischungen der 3-Komponente des Generators der  $SU(2)$ -Symmetrie und des Generators der  $U(1)$ -Symmetrie.) Die massiven Vektorbosonen koppeln nur an linkshändige Fermionen, das Photon koppelt an links- und rechtshändige Fermionen. Wie die Namen schon andeuten, besitzen  $W^\pm$  eine Elementarladung,  $Z^0$  und Photon hingegen sind neutral. Schwache und elektromagnetische Kopplung, ebenso wie die Massen von  $Z^0$  und  $W^\pm$  sind bei geeigneter Parametrisierung durch den sogenannten schwachen Mischungswinkel miteinander verknüpft.

Die typischen (weil nicht stark wechselwirkenden (s.u.)) Teilchen der schwachen Wechselwirkung sind die Leptonen, von denen es drei elementar geladene ( $e, \mu, \tau$ ) und drei diesen zuordenbare ladungs- und masselose Neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) gibt. Die jeweiligen linkshändigen Komponenten transformieren als Dublett, rechtshändige Elektron-Leptonen als Singlett, rechtshändige Neutrinos existieren nicht.

**Die starke Wechselwirkung**, auch QCD genannt, hat die Struktur einer  $SU(3)$ -Eichgruppe. Die den Eichfeldern entsprechenden Teilchen werden Gluonen genannt. Da es acht Generatoren der  $SU(3)$  gibt, gibt es auch acht unterschiedliche Gluonen. Neben den Gluonen gibt es noch sechs Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen, die Quarks. Diese haben im Rahmen der starken Wechselwirkung eine von drei verschiedenen (Farb-)Ladungen. Die unterschiedlichen Farbladungen werden rot, grün und blau genannt, die entsprechenden negativen Ladungen anti-rot anti-grün und anti-blau. Damit lässt sich die Anzahl unterschiedlicher Gluonen auch physikalisch verstehen: Es gibt neun Farb/Anti-Farb-Kombinationen, diese lassen sich in verschiedenen Basen in ein Oktett und ein Singlett anordnen. Diese Zustände (nicht die Farbkombinationen) werden Gluonen genannt. Nur für die Gluonen des Oktetts gilt, dass sie nur im Verbund mit anderen Quarks und Gluonen existieren können (confinement). Für das Singlett gilt dies nicht. Das Singlett-Gluon könnte somit auch als freies Teilchen existieren und wie das Photon eine langreichweitige - allerdings starke - Wechselwirkung vermitteln. Dies allerdings hätte man bemerkt, so es in einem solchen Universum überhaupt Beobachter gäbe, die das bemerken könnten. Daraus folgt, dass es kein Singlett-Gluon gibt, und somit nur acht Gluonen existieren. Siehe hierzu auch Ref. [13].

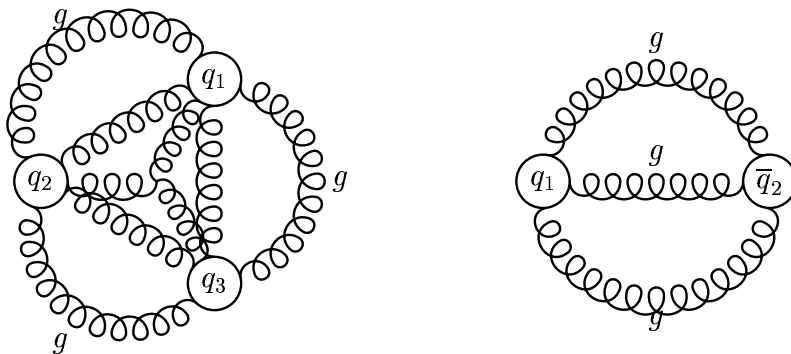
---



Nach Masse aufsteigend werden **die Quarks** up, down, strange, charm, beauty (bottom) und top (truth) Quark genannt. In Bezug auf die elektroschwache Wechselwirkung besitzen  $u$ -,  $c$ - und  $t$ -Quark  $+\frac{2}{3}$ ,  $d$ -,  $s$ - und  $b$ -Quark  $-\frac{1}{3}$  Elementarladung. Die Größenordnung der Massen gibt bei den Quarks dieselbe Generationenordnung wie bei den Leptonen vor:  $(u,d)$ ,  $(c,s)$  und  $(t,b)$ . Die schwachen und die Masseneigenzustände der Quarks sind aber nicht identisch. D.h. die Wechselwirkungseigenzustände der  $d$ -artigen Komponenten der Familien-Dubletts bestehen aus einer Mischung aus Masseneigenzuständen von  $d$ -,  $s$ - und  $b$ -Quark. Die neun Faktoren der drei Mischungen bilden die  $CKM$ -Matrix. Ein  $W^\pm$  muss also nicht immer in Quarks der gleichen Generation zerfallen.

Die Existenz dreier Quark-Generationen ermöglicht  $CP$ - und  $T$ -Verletzung, die auf irgendeine Weise für den beobachteten Überschuss von Materie gegenüber Antimaterie verantwortlich sein müssen. Da die  $CKM$ -Elemente, die die erste und die dritte Generation mischen, sehr klein sind und im Falle von nur zwei Generationen keine  $CP$ - oder  $T$ -Verletzung möglich wäre, müssen  $CP$ - und  $T$ -Verletzung kleine Effekte sein.

Im Gegensatz zu Gravitation und elektroschwacher Wechselwirkung nimmt die starke Kraft bei großen Abständen zu (confinement), bei kleinen Abständen hingegen verhalten sich die Quarks nahezu wie freie Teilchen (asymptotic freedom). Dies führt dazu, dass einzelne Quarks nicht als wirklich freie Teilchen existieren können. Statt dessen kombinieren entweder drei Quarks unterschiedlicher Farbe zu einem farbneutralen Baryon oder ein Quark (mit einer bestimmten Farbe) und ein Anti-Quark (mit der entsprechenden Anti-Farbe) zu einem ebenso farbneutralen Meson.



Auf diese Weise wird die Vielzahl von Mesonen und Baryonen, die in den letzten 50 Jahren an den Beschleunigern entdeckt wurden, wieder sehr über-

sichtlich, da sich (bis auf Leptonen und Eichbosonen) alle gefundenen Teilchen als Baryonen, Mesonen oder deren Anregungszustände interpretieren lassen.

**Der Higgsmechanismus** im Standardmodell beschreibt, wie massive Teilchen ihre Massen erhalten.

Eine unbestreitbare Tatsache ist, dass es Teilchen gibt, die Masse besitzen. Fügt man die Massen jedoch „von Hand“ in die Feldtheorie ein, indem man einfach entsprechende Massenterme in die Lagrangedichte schreibt, ergeben sich große Probleme bei Eichinvarianz und Renormierbarkeit. Einfügen von Massen durch globale spontane Symmetriebrechung erzwingt die Existenz von masselosen Spin-0 „Goldstone-Bosonen“ [14]. Da ein solches Teilchen niemals gefunden wurde, und lokale spontane Symmetriebrechung keine Goldstone-Bosonen fordert, geht man heute davon aus, dass Teilchen ihre Masse durch Koppeln an ein skalares Feld erhalten [15]. Dieses „Higgsfeld“ stellt die lokalen Fluktuationen des im Abschnitt über die elektroschwache Wechselwirkung eingeführten Skalarfeldes um den Vakuumerwartungswert dar. Dieser Vakuumerwartungswert ist größer Null. Das Higgspotential hat dadurch eine charakteristische „Sombbreroform“. Wechselwirkung eines Teilchens mit diesem Higgsfeld macht sich dann als Masse bemerkbar. Anders ausgedrückt hängt die Kopplungsstärke eines Teilchenfeldes mit dem Higgsfeld von der Masse des Teilchens ab. Nach dem durch Selbstwechselwirkung des Higgsfeldes entstehenden „Higgsteilchen“ wird derzeit (bzw. in naher Zukunft) intensiv gesucht.

### 1.1.3 Grenzen und mögliche Erweiterungen

- i) Verschiedene Experimente haben gezeigt, dass Neutrinos vermutlich doch eine - wenn auch sehr kleine - Masse besitzen. Als Folge existieren auch linkshändige Neutrinos und Neutrinos oszillieren. D.h. die Neutrinos der einzelnen Generationen wandeln sich ineinander um. Dies alles ins Standardmodell einzubauen stellt keine große Schwierigkeit dar. Die momentan noch als „Standardmodell“ bezeichnete Theorie enthält jedoch noch masselose Neutrinos.
  - ii) Die Gravitation lässt sich bisher noch nicht in das Standardmodell einbauen.
  - iii) Die raumzeitliche Geometrie des Universums und die Rotationsgeschwindigkeiten von Spiralgalaxien lassen auf eine Energiedichte im Universum schließen, die sich mit den im Standardmodell vorhandenen Teilchen allein nicht erklären lässt. Man schließt daher auf die Existenz so genannter „Dunkler Materie“.
-

iv) Die bisher gefundenen  $CP$ -verletzenden Prozesse reichen nicht aus, um die beobachtete Materie-Anti-Materie-Asymmetrie zu erklären.

v) Die große Anzahl freier Parameter (18, mit Higgs- und Neutrinomassen plus Leptonmischungsmatrix wären es 26) ist unbefriedigend. Besonders die klare Massenhierarchie verlangt nach einer Erklärung.

An diesen und anderen Punkten sind Änderungen am Standardmodell nötig oder zumindest wünschenswert.

## 1.2 Motivation und Aufgabenstellung

Zur Überprüfung des Standardmodells müssen Vorhersagen über messbare Größen gemacht werden. Messbare Größen sind z.B. Lebensdauern von Teilchen oder Zerfallsverzweigungsverhältnisse. Für exakte Vorhersagen sind die Bewegungsgleichungen jedoch viel zu kompliziert. Vakuumfluktuationen sorgen zusätzlich dafür, dass prinzipiell Teilchen „im Hintergrund“ eine Rolle spielen. Auch wird es nicht möglich sein alle Gluonen zu berücksichtigen, die ein Meson oder Baryon binden.

Man muss sich somit häufig für konkrete Systeme über geeignete Näherungen Gedanken machen. So beginnt Kapitel 2 mit der Übertragung eines Formalismus (siehe Ref. [16]) zur Berechnung des Zerfalles schwerer Zwei-Teilchen-Bindungszustände von symmetrischen (beide Teilchen sind gleich schwer) auf asymmetrische (die beiden Teilchen sind unterschiedlich schwer) Systeme.

Da in diesem Formalismus nach kleinen Relativimpulsen entwickelt wird, ist es notwendig die Wellenfunktion am Ursprung zu kennen. Hierfür wird ebenfalls in Kapitel 2 ein Wert berechnet.

In Kapitel 3 (Prozesse) werden zunächst Zerfallsraten für das  $B_c^\pm$  im Spectatormodell für unterschiedliche Massenparameter berechnet. Das Spectatormodell berücksichtigt nicht, dass der Zerfall des  $B_c^\pm$  auch durch gegenseitige Annihilation der beiden Quarks geschehen kann, daher wird anschließend eben diese Art von Zerfall berechnet.

Im dritten Abschnitt von Kapitel 3 wird der Strahlungsübergang von einem angeregten Zustand zum Grundzustand des  $B_c^\pm$  auf unterschiedliche Weisen berechnet.

Der letzte betrachtete Prozess ist schließlich der Zerfall in ein  $\eta_c$  ( $c\bar{c}$  Grundzustand) und ein masseloses  $l\nu_l$ -Paar.

### 1.2.1 Schwere Mesonen

Je schwerer die beiden Konstituentenquarks eines Mesons sind, desto unwichtiger werden (bei Zerfällen) in Relation dazu zunächst relativistische Effekte

und schließlich die auftretenden Impulse und auch die Bindungsenergie. Das top-Quark ist zu schwer, als dass es vor seinem Zerfall beobachtbare Bindungen irgendwelcher Art eingehen würde. Das schwerste Meson ist somit das  $\Upsilon$  ( $b\bar{b}$ ). Auch das  $J/\Psi$  ( $c\bar{c}$ ) gilt noch als so schwer, dass nicht-relativistische Näherungen gerechtfertigt erscheinen. Besonders von Systemen, die ein  $b$  enthalten, verspricht man sich Erkenntnisse über und Tests des Standardmodells. Jedes B-System hat ganz eigene Eigenschaften. Das  $B_u^\pm$  ( $\bar{b}u$  bzw.  $b\bar{u}$ ) besteht aus einem eindeutig schweren und einem eindeutig leichten Quark und ist geladen, das  $B_d$  ( $\bar{b}d$  bzw.  $b\bar{d}$ ) dagegen ist neutral. Das  $\Upsilon$  besteht aus zwei (gleichen) schweren Quarks und ist neutral. Das einzige Meson, das ein  $b$  und ein anderes schweres Quark enthält (und zudem geladen ist), ist also das  $B_c^\pm$  ( $\bar{b}c$  bzw.  $b\bar{c}$ ).

Als geladenes Teilchen kann es nicht durch elektromagnetische Annihilation der beiden Quarks zerfallen, sondern der Zerfall geschieht entweder durch Zerfall eines der beiden Quarks (Spectatorzerfall) oder durch gegenseitige schwache Annihilation der beiden Quarks.

Die experimentellen Untersuchungen zum  $B_c$  haben erst vor kurzem begonnen. Zudem werden teilweise alte Daten auf Fehlinterpretation von  $B_c^\pm$ -Vorkommen als andere Teilchen überprüft. [17]

---

# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Doppelt schwere Mesonen

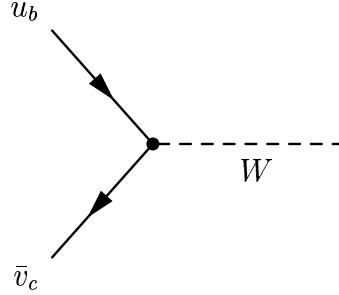
Doppelt schwere Mesonen bestehen aus zwei schweren Quarks. D.h. die Massen beider Quarks sind groß gegen den typischen Relativimpuls der beiden Quarks und gegen die Bindungsenergie. Es gibt nur drei doppelt schwere Mesonen bzw. Mesonsysteme: Charmonium ( $c\bar{c}$ ),  $B_c^\pm$  ( $\bar{b}c$  bzw.  $b\bar{c}$ ) und Bottomonium ( $b\bar{b}$ ). Unter der Voraussetzung, dass der Relativimpuls auch klein gegen den größten im betrachteten Prozess auftretenden Impuls ist, kann man eine Entwicklung im Relativimpuls durchführen. Die einzelnen Ordnungen der Entwicklung ergeben dann die Beiträge der verschiedenen Bahndrehimpulszustände. Für verschwindenden Bahndrehimpuls koppeln die Spins der beiden Quarks entweder zum Singlett- ( $\eta_c, {}^1B_c, \eta_b$ ) oder zu einem Triplett- ( $J/\Psi, {}^3B_c, \Upsilon$ )-Zustand.

Der folgende Abschnitt führt das soeben Beschriebene aus und überträgt den Formalismus aus Ref. [16] zur Beschreibung des Zerfalles symmetrischer Zwei-Fermion-Bindungszustände auf asymmetrische Systeme:

#### 2.1.1 Der Projektionsformalismus für asymmetrische Systeme

Betrachtet man zunächst Prozesse, bei denen zwei freie Teilchen wechselwirken, also z.B.

---



so kann man die Amplitude hierfür ganz allgemein

$$\mathcal{A} = \bar{v}_c(p_c, \bar{s}) O u_b(p_b, s) \quad (2.1)$$

schreiben. (Die Benennung der Teilchen mit  $b$  und  $c$  bedeutet hier noch nicht, dass es sich um Quarks handelt.)

In Gl. (2.1) ist  $O$  der vom konkreten Prozess abhängige Operator.

$p_b$  und  $p_c$  sind die Impulse und  $s$  und  $\bar{s}$  die Spinindizes der einlaufenden Teilchen bzw. der Spinoren  $\bar{v}_c$  und  $u_b$ .

Für freie Teilchen können die Impulse und Spins beliebig bzw. vom Experimentator (z.B. bei Streuexperimenten) festgelegt sein. Ein Bindungszustand hingegen ist gekennzeichnet durch die definierte relative Einstellung der beiden Spins zueinander und die Gewichtung des Relativimpulses durch Multiplikation mit der Wellenfunktion  $\Psi_{s\bar{s}}(\vec{p})$ .

Dieser Relativimpuls ist der kanonisch konjugierte Impuls zum Relativvektor  $\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_c$ .

Mit der nicht-relativistischen freien Lagrangefunktion  $L$  gilt dann für jede räumliche Komponente  $i$ :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \quad (2.2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} \left( \frac{1}{2} m_b \dot{r}_{bi}^2 + \frac{1}{2} m_c \dot{r}_{ci}^2 \right) \quad (2.3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} \left( \frac{1}{2} m_b \left( \dot{R}_i + \frac{m_c}{M} \dot{r}_i \right)^2 + \frac{1}{2} m_c \left( \dot{R}_i - \frac{m_b}{M} \dot{r}_i \right)^2 \right) \quad (2.4)$$

$$= \frac{m_b m_c}{M} (\dot{r}_{bi} - \dot{r}_{ci}) \quad (2.5)$$

$$= \frac{m_c p_{bi} - m_b p_{ci}}{M} \quad (2.6)$$

wobei  $R_i$  und  $r_i$  Schwerpunkts- und Relativkoordinaten sind und  $M$  die Gesamtmasse  $M = m_b + m_c$  ist. (Siehe hierzu auch Ref. [18].)

Die Amplitude wird noch mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} \quad (2.7)$$

normiert.

Und somit erhält man zunächst

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Psi_{s\bar{s}}(\vec{p}), \bar{v}_c(p_c, \bar{s}) O u_b(p_b, s) \quad (2.8)$$

wobei dann die Normierung der Orts- ( $\Phi(\vec{r})$ ) und Impulsraum- ( $\Psi(\vec{p})$ ) Wellenfunktionen

$$1 = \sum_{s\bar{s}} \int d^3p |\Psi_{s\bar{s}}(\vec{p})|^2 = \sum_{s\bar{s}} \int d^3x |\Phi_{s\bar{s}}(\vec{x})|^2 \quad (2.9)$$

$$\Psi(\vec{p}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \Phi(\vec{x}) e^{-i\vec{r}\vec{p}} \quad (2.10)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \Psi(\vec{p}) e^{i\vec{r}\vec{p}} \quad (2.11)$$

ist.

Gl. (2.6) soll nun für alle vier Komponenten des 4-Impulses gelten:

$$p = \frac{m_c p_b - m_b p_c}{M} = \left( \frac{m_c p_b^0 - m_b p_c^0}{M}, \vec{p} \right) \quad (2.12)$$

Für  $\frac{|\vec{p}_i|}{m_i} \ll 1$  kann man  $p^0$  entwickeln und die  $p^0$  Komponente ist dann bis  $O(|\vec{p}|^1)$

$$p^0 \cong 0, \quad (2.13)$$

denn

$$m_c p_b^0 - m_b p_c^0 = m_c \sqrt{m_b^2 + |\vec{p}_b|^2} - m_b \sqrt{m_c^2 + |\vec{p}_c|^2} \quad (2.14)$$

$$\cong m_c m_b - m_b m_c \quad (2.15)$$

Die Bindungsenergie wird vernachlässigt, dann ist im Schwerpunktsystem

$$p_b + p_c = P = (M, 0) \quad (2.16)$$

der kanonisch konjugierte Impuls zu den Schwerpunktkoordinaten.

Umgekehrt gilt somit:

$$p_b = \frac{m_b}{M} P + p \quad (2.17)$$

$$p_c = \frac{m_c}{M} P - p \quad (2.18)$$

Wie man an den Indizes der Wellenfunktion in Gl. (2.8) erkennt, ist die Kopp-  
lung der einzelnen Spins und Bahndrehimpulse noch nicht berücksichtigt.  
Zum Koppeln muss man die einzelnen Amplituden in geeigneter Weise, d.h.  
multipliziert mit den entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten, addie-  
ren:

$$\sum_{s\bar{s}} \bar{v}_c(p_c, \bar{s}) O u_b(p_b, s) \langle s, \bar{s} | S, S_z \rangle \quad (2.19)$$

$$= \sum_{s\bar{s}} \langle s, \bar{s} | S, S_z \rangle \text{Tr} [O u_b(p_b, s) \otimes \bar{v}_c(p_c, \bar{s})] \quad (2.20)$$

$$= \sum_{s\bar{s}} \langle s, \bar{s} | S, S_z \rangle \text{Tr} [O(\not{p}_b + m_b) u_b(0, s) \otimes \bar{v}_c(0, \bar{s}) (\not{p}_c - m_c)] \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E_b + m_b}} \frac{1}{\sqrt{E_c + m_c}} \text{Tr} \left[ (m_c - \not{p}_c) O (m_b + \not{p}_b) \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \Pi_{SS_z} \right] \quad (2.22)$$

$$= \left( (|\vec{p}|^2 + m_b^2)^{\frac{1}{2}} + m_b \right)^{-\frac{1}{2}} \left( (|\vec{p}|^2 + m_c^2)^{\frac{1}{2}} + m_c \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{Tr} \left[ \left( m_c - \frac{m_c}{M} \not{P} + \not{p} \right) O \left( m_b + \frac{m_b}{M} \not{P} + \not{p} \right) \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \Pi_{SS_z} \right] \quad (2.23)$$

wobei

$$\Pi_{00} = -\gamma_5 \quad (2.24)$$

$$\Pi_{1S_z} = -\not{\epsilon}_{S_z} \quad (2.25)$$

$$\epsilon_{(-1)}^\mu = (0, 1, -i, \sqrt{2}) \quad (2.26)$$

$$\epsilon_0^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (2.27)$$

$$\epsilon_1^\mu = (0, -1, -i, \sqrt{2}) \quad (2.28)$$

Den entscheidenden Schritt zu Gl. (2.22) - also

$$\sum_{s\bar{s}} \langle s, \bar{s} | S, S_z \rangle u_b(0, s) \otimes \bar{v}_c(0, \bar{s}) = -\frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \Pi_{SS_z} \quad (2.29)$$

kann man im Schwerpunktsystem verifizieren, indem man die Rechnung mit  
einer beliebigen Darstellung (z.B. mit der Dirac-Darstellung wie in Ref. [19]  
oder der Weyl-Darstellung wie in Ref. [20]) der Spinoren und  $\gamma$ -Matrizen  
komponentenweise durchföhrt.

Nun muss Gl. (2.23) noch für kleine  $\frac{|\vec{p}|}{\mu}$  entwickelt werden. Dann wird daraus  
in

$O((p_\mu)^0)$  :

$$\sqrt{4 \frac{\mu}{M}} \text{Tr} \left[ M O_0 \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \Pi_{SS_z} \right] \quad (2.30)$$



und in  $O((p_\mu)^1)$  :

$$\sqrt{\frac{4\mu}{M}} Tr \left[ \left( M(\vec{p} \cdot \vec{O}) + \frac{M}{4\mu} \left( \{ \not{p}, O_0 \} + \sqrt{1 - \frac{4\mu}{M}} [ \not{p}, O_0 ] \right) \right) \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \Pi_{SSz} \right] \quad (2.31)$$

wobei

$$O_0 = O|_{p=0} \quad (2.32)$$

$$\hat{O}_\nu = \frac{\partial}{\partial p^\nu} O|_{p=0} \quad (2.33)$$

$$\mu = \frac{m_b m_c}{m_b + m_c} \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

Anmerkung: Für  $m_b = m_c$  ist  $\frac{4\mu}{M} = 1$ , wodurch man leicht sieht, dass die genannten Amplituden dann mit denen in Ref. [16] übereinstimmen. Es bleibt noch die Integration in Gl. (2.8) auszuführen. Dies ergibt in  $O(|\vec{p}|^0)$ , d.h. für Bahndrehimpuls  $L = 0$ :

$$\sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Psi^{(L=0)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{p}\vec{r}} \Phi(\vec{r}) \quad (2.36)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Phi(\vec{r}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{p}\vec{r}} \quad (2.37)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int d^3 x \Phi(\vec{r}) \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (2.38)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \Phi(0) \quad (2.39)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \phi(0) \quad (2.40)$$

mit der vollständigen ( $\Phi$ ) bzw. radialen ( $\phi$ ) Ortswellenfunktion am Ursprung. Kombiniert man nun (2.30) und (2.40), so erhält man für die beiden möglichen S-Wellen-Amplituden:

$$A_J^{L=0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{M}} \phi^{(L=0)}(0) Tr \left[ O_0 (\not{P} + M) \begin{pmatrix} -\gamma_5 \\ -\not{\epsilon} \end{pmatrix} \right] \text{ für } \begin{pmatrix} J = 0 \\ J = 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Es ändert sich im Falle  $L = 0$  also nichts im Vergleich zum symmetrischen System. Alle hinzugekommenen Änderungen heben sich gegenseitig wieder

auf. Die Asymmetrie steckt folglich vollständig im Operator  $O_0$ .  
Die Integration für  $L = 1$  in Gl. (2.36)-(2.40) ergibt in äquivalenter Weise

$$\sqrt{\frac{1}{2\mu}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} p_\mu \Psi_m^{(L=1)}(\vec{p}) = -\sqrt{\frac{1}{2\mu}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \phi^{L=1}(0) e_\mu^{(m)} \quad (2.42)$$

mit dem Polarisationsvektor der Bahnbewegung  $e_\mu^{(m)}$  ( $m = -1, 0, 1$ ), der in den einzelnen Komponenten dasselbe Aussehen hat wie der Spinpolarisationsvektor in Gl. (2.26)-(2.28).

Da die P-Wellen-Amplituden im Weiteren nicht mehr benötigt werden, seien sie hier nur kurz ohne Herleitung genannt:

$$A_{Singlett} = \frac{a}{\sqrt{2}} Tr \left[ \left( \sqrt{\frac{M}{4\mu}} \not{\epsilon} O_0 \left( \sqrt{1 - 4\frac{\mu}{M}} + \frac{\not{P}}{M} \right) + \sqrt{4\frac{\mu}{M}} (\epsilon^\nu O_\nu) \frac{M + \not{P}}{2} \right) \gamma_5 \right] \quad (2.43)$$

$$A_{J=0} = \frac{a}{\sqrt{6}} Tr \left[ 3O_0 \sqrt{\frac{M}{4\mu}} \left( 1 + \sqrt{1 - 4\frac{\mu}{M}} \frac{\not{P}}{M} \right) + \sqrt{4\frac{\mu}{M}} \left( \hat{O} - \frac{\not{P}(\not{P}^\nu O_\nu)}{M^2} \right) \frac{M + \not{P}}{2} \right] \quad (2.44)$$

$$A_{J=1} = \frac{a}{2} Tr \left[ 2O_0 \sqrt{\frac{M}{4\mu}} \left( 1 + \sqrt{1 - 4\frac{\mu}{M}} \frac{\not{P}}{M} \right) \gamma_5 \not{\epsilon} + i \sqrt{4\frac{\mu}{M}} (P, \hat{O}, \gamma, \epsilon) \frac{M - \not{P}}{2M} \right] \quad (2.45)$$

$$A_{J=2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{4M} Tr \left[ \hat{O}^\mu \gamma^\nu \frac{M - \not{P}}{2} \right] \epsilon_{\mu\nu} \quad (2.46)$$

mit  $\epsilon$  als Polarisationsvektor/-tensor der  $J = 1, 2$  Zustände,  $(a, b, c, d) = \det(a, b, c, d)$  und

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\mu}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \phi^{L=1}(0). \quad (2.47)$$

### 2.1.2 $\phi(0)$

Für die Bahnwellenfunktion (genauer hier deren radialer Anteil) am Schwerpunkt wird zwischen den Bahnwellenfunktionen am Ursprung von  $J/\Psi$  und

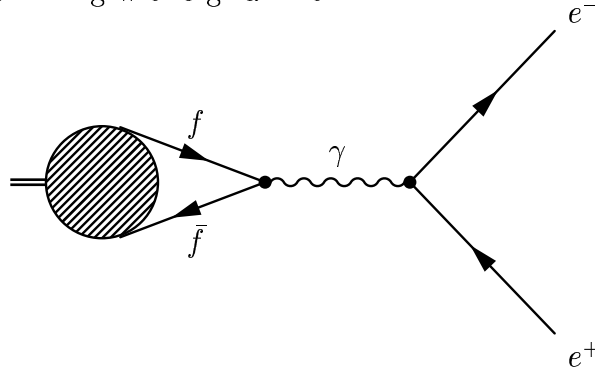
$\Upsilon$ , die man aus den leptonischen Raten erhält, interpoliert.

In der QED ist die Annihilationsrate eines gebundenen  $^3S_1$ -Zustandes zweier gleicher, schwerer Fermionen ( $f$  und  $\bar{f}$ ) (z.B. des Myoniums) nach  $e^+e^-$  (leptonische Breite):

$$\Gamma(f\bar{f} \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\alpha^2 Q^2 |\phi(0)|^2}{3M^2} = \frac{\alpha^2 Q^2 |\phi(0)|^2}{12\mu^2} \quad (2.48)$$

mit der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante  $\alpha$  und der Ladung  $Q$  der Teilchen im Bindungszustand (in Einheiten der Elementarladung  $e$ ).

Schraffierte Bereiche in den Feynmangraphen kennzeichnen in dieser Arbeit Bindungszustände, so dass der zur leptonischen Breite gehörende Graph in niedrigster Ordnung wie folgt aussieht:



Im Falle von Mesonen (mit den Quarks  $Q$  und  $\bar{Q}$ ) muss zusätzlich der Einfluss der Farbladungen berücksichtigt werden (siehe auch Ref. [21]), der einen Farbfaktor ergibt:

Mesonen sind Farb-Singletts:

$$|\bar{Q}Q\rangle_{\text{Farb-Sing.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\bar{Q}_1Q_1\rangle + |\bar{Q}_2Q_2\rangle + |\bar{Q}_3Q_3\rangle) \quad (2.49)$$

wobei die Indizes „1“, „2“ und „3“ hier für die Farbladungen stehen.

Dies bedeutet für die Amplitude:

$$A = (\bar{Q}OQ)_{(\text{Farb-Sing.})} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{Q}_1OQ_1 + \bar{Q}_2OQ_2 + \bar{Q}_3OQ_3) \quad (2.50)$$

Nun sind am hier betrachteten Prozess keinerlei Gluonen beteiligt. Die Rechnung ist somit reine QED. Vom Standpunkt der QED aus tragen allerdings alle drei  $\bar{Q}_iOQ_i$  kohärent zur Amplitude bei. Ansonsten unterscheiden sich die beiden Systeme (Myonium und schwere Mesonen) in niedrigster Ordnung Störungsrechnung in keinen weiteren wesentlichen Punkten.

D.h.

$$A = \sqrt{3}A_{QED} \quad (2.51)$$

Und mit (2.48) gilt also für symmetrische schwere Mesonen:

$$\Gamma(Q\bar{Q} \rightarrow e^+e^-) = 4 \frac{\alpha^2 Q^2 |\phi(0)|^2}{M^2} = \frac{\alpha^2 Q^2 |\phi(0)|^2}{4\mu^2} \quad (2.52)$$

Weiterhin hat sich empirisch gezeigt, dass im Massenbereich von Charmonium und Bottonium die radiale Wellenfunktion am Ursprung proportional zur reduzierten Masse ist:

$$\phi(0) = c\mu \quad (2.53)$$

Auf diese Weise kann man  $\phi(0)_{B_c}$  aus  $\phi(0)_{J/\Psi}$  bzw.  $\phi(0)_\Upsilon$  berechnen. Falls es doch kleine Abweichungen von Gl. (2.53) geben sollte, wird gemittelt:  $c_{B_c} = \frac{1}{2}(c_\Upsilon + c_{J/\Psi})$  und somit:

$$\phi_{B_c}(0) = \frac{2\mu_{B_c}}{\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\Gamma_\Upsilon}}{|Q_b|} + \frac{\sqrt{\Gamma_{J/\Psi}}}{|Q_c|} \right) \quad (2.54)$$

$$|\phi_{B_c}(0)|^2 = \frac{4\mu_{B_c}^2}{\alpha^2 |Q_b| |Q_c|} \Gamma' \quad (2.55)$$

wobei

$$\Gamma' = \frac{1}{4} \left( \frac{|Q_c|}{|Q_b|} \Gamma_\Upsilon + \frac{|Q_b|}{|Q_c|} \Gamma_{J/\Psi} + 2\sqrt{\Gamma_\Upsilon \Gamma_{J/\Psi}} \right) \quad (2.56)$$

$$= \frac{1}{4} (2\Gamma_\Upsilon + \Gamma_{J/\Psi} + 2\sqrt{\Gamma_\Upsilon \Gamma_{J/\Psi}}) \quad (2.57)$$

$$= 2,635 \text{ keV}. \quad (2.58)$$

Nach Ref. [22] ist

$$\Gamma_{J/\Psi}^{ee} = 5,26 \pm 0,37 \text{ keV} \quad (2.59)$$

$$\Gamma_\Upsilon^{ee} = 1,32 \pm 0,04 \pm 0,03 \text{ keV} \quad (2.60)$$

$$M_{J/\Psi} = 3096,87 \pm 0,04 \text{ MeV} \quad (2.61)$$

$$M_\Upsilon = 9460,30 \pm 0,26 \text{ MeV} \quad (2.62)$$

$$M_{B_c} = 6,4 \pm 0,39 \text{ MeV} \quad (2.63)$$

$$m_c = 1,0..1,4 \text{ MeV} \quad (2.64)$$

$$m_b = 4,0..4,5 \text{ MeV} \quad (2.65)$$

und somit

$$|\phi_{B_c}(0)|^2 = 1,144 \text{ (GeV)}^3. \quad (2.66)$$

Zum Vergleich: In Einheiten  $\frac{\sqrt{\text{keV}}}{\alpha}$  sind  $c_{J/\Psi} = 6,88 \pm 0,24$ ,  $c_\Upsilon = 6,89 \pm 0,18$  im Rahmen der Fehler wirklich gleich, und somit  $c_{B_c} = 6,89 \pm 0,3$ . In der

Literatur [18, 23, 24] finden sich für  $|\phi(0)|^2$  die Werte  $1,72 \text{ GeV}^3$ ,  $1,64 \text{ GeV}^3$  bzw.  $1,39 \text{ GeV}^3$ . Nicht-relativistisch ergibt sich (siehe auch [25]) mit  $\alpha_s = 0,2$ :  $|\phi(0)|^2 = 4(\mu\frac{4}{3}\alpha_s)^3 \cong 0,11 \text{ GeV}^3$ .

Anm.: Bei anderen als Annihilationszerfällen, z.B. Spectatorzerfällen oder Strahlungsübergängen, muss man sich gesondert Gedanken über einen möglichen Farbfaktor machen.

## 2.2 Bisherige experimentelle Ergebnisse

Experimentell wurde das  $B_c$  am CDF-Detektor am Fermilab entdeckt [26]. Die dort für Masse und Lebensdauer gemessenen Werte sind bisher auch die einzigen, die in das PDB (Ref. [22]) aufgenommen wurden. Demnach ist die gemessene Lebensdauer des  $B_c^\pm$   $\tau = 0,46 \pm 0,18 \text{ psec}$ . Dies entspricht einer totalen Zerfallsrate  $\Gamma_{exp} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ . Alle Ergebnisse werden im Folgenden mit dieser Größe verglichen. Die Masse des  $B_c^\pm$  ist  $M = 6,4 \pm 0,39 \text{ GeV}$ .

## 2.3 Vorbemerkungen zu den Rechnungen

Die Konventionen für die Feynmanregeln sind wie in Ref. [5], die Konventionen für Metrik ( $diag(g_\nu = (1, -1, -1, -1))$ ) und Dirac-Matrizen wie in Ref. [19] gewählt.

Die Berechnung der Matrixelemente erfolgte zumeist mit Hilfe von FORM3. (Ref. [27])

Die Grundlagen der Phasenraumintegration finden sich in Ref. [28]. Ausgeführt wurden diese aber wie in Anhang A beschrieben.

Folgende Konstanten treten auf:

Die Fermikonstante:

$$G_F = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}m_W^2 \sin^2 \theta_W} = 1,16639 \cdot 10^{-5} \quad (\text{GeV})^{-2} \quad (2.67)$$

mit der Feinstrukturkonstante

$$\alpha^{-1} = \alpha^{-1}(0) = 137,03599976 \quad (2.68)$$

der Masse des W-Bosons

$$m_W = 80,423 \text{ GeV} \quad (2.69)$$

und dem schwachen Mischungswinkel

$$\sin^2 \theta_W = 0,23143 \quad (2.70)$$

Die Beträge der  $CKM$ -Matrixelemente sind:

$$\begin{array}{lll} |V_{ud}| = 0,9741 \dots 0,9756 & |V_{us}| = 0,219 \dots 0,226 & |V_{ub}| = 0,0025 \dots 0,0048 \\ |V_{cd}| = 0,219 \dots 0,226 & |V_{cs}| = 0,9732 \dots 0,9748 & |V_{cb}| = 0,038 \dots 0,044 \\ |V_{td}| = 0,004 \dots 0,014 & |V_{ts}| = 0,037 \dots 0,044 & |V_{tb}| = 0,9990 \dots 0,9993 \end{array}$$

Die tatsächlich eingesetzten Mittelwerte werden immer angegeben.

Alle Werte nach Particle Data Book (Ref. [22])

Alle dafür in Frage kommenden Rechnungen wurden in der Näherung der Vier-Fermionen-Wechselwirkung der Fermi-Theorie durchgeführt, also in  $\frac{M^2}{m_W^2}$  entwickelt.

In den Ergebnissen tauchen bestimmte Faktoren immer wieder auf. Durch Kombinationen mit Potenzen von  $M_{B_c} = 6,4$  GeV verbleiben nur noch dimensionslose Konstanten:

$$G_F M^2 = 0,48 \cdot 10^{-3} \quad (2.71)$$

$$\frac{|\phi(0)|^2}{M^3} = 4,36 \cdot 10^{-3} \quad (2.72)$$

Das Massenparameterpaar  $(m_b, m_c)$  kann man nicht nur durch  $(M, \mu)$  sondern auch durch  $(M, R_{as})$  mit

$$R_{as} = \frac{m_b - m_c}{m_b + m_c} = \sqrt{1 - 4 \frac{\mu}{M}} \quad (2.73)$$

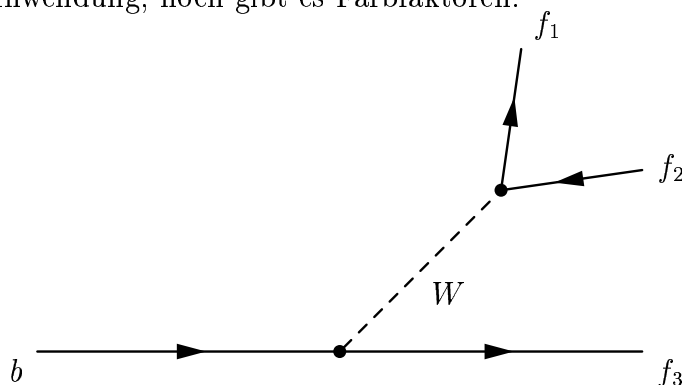
ersetzen. Dies hat zum einen den Vorteil, dass nur noch eine Größe dimensionsbehaftet ist, zum anderen hat sich bei Verwendung von  $R_{as}$  statt  $\mu$  bei einigen FORM Rechnungen die Zahl der Terme und die Rechenzeit deutlich reduziert.

# Kapitel 3

## Prozesse

### 3.1 Spectatormodell

Bei Spectatorzerfällen wird eines der beiden Quarks des Mesons als unabhängig vom anderen zerfallend betrachtet. Der Bindungszustand ist in niedrigster Ordnung irrelevant. Daher findet weder der Projektionsformalismus eine Anwendung, noch gibt es Farbfaktoren.



Mit Ausnahme der Benennung als  $b$ - bzw.  $\bar{c}$ -Quark ist die Amplitude genau dieselbe wie beim Zerfall des Myon.

$$A = -2\sqrt{2}G_F i V_{3b} V_{12}^* \bar{u}_3 \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_b \bar{u}_1 \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} v_2 \quad (3.1)$$

Mit dem Standardverfahren (z.B. nach Ref. [6]) ergibt sich

$$\frac{1}{2} \sum_{s_b s_1 s_2 s_3} A^* A = 4G_F^2 |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{p}_b + m_b) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{p}_3 + m_3) \right] \\ Tr \left[ \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{p}_2 - m_2) \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{p}_1 + m_1) \right] \quad (3.2)$$

Die unterschiedlichen Raten resultieren aus den unterschiedlichen Massen, den  $CKM$ -Faktoren und der höheren Anzahl an Zerfallskanälen.

Die 14 möglichen Endzustände beim Zerfall des  $b$ -Quark sind

$$\begin{aligned} & (e, \bar{\nu}_e, c), (\mu, \bar{\nu}_\mu, c), (\tau, \bar{\nu}_\tau, c), \\ & (d, \bar{u}, c), (s, \bar{u}, c), (d, \bar{c}, c), (s, \bar{c}, c), \\ & (e, \bar{\nu}_e, u), (\mu, \bar{\nu}_\mu, u), (\tau, \bar{\nu}_\tau, u), \\ & (d, \bar{u}, u), (s, \bar{u}, u), (d, \bar{c}, u), (s, \bar{c}, u). \end{aligned}$$

Für den Zerfall des  $c$ -Quark gibt es acht mögliche Endzustände:

$$\begin{aligned} & (e, \bar{\nu}_e, s), (\mu, \bar{\nu}_\mu, s), (d, \bar{u}, s), (s, \bar{u}, s), \\ & (e, \bar{\nu}_e, d), (\mu, \bar{\nu}_\mu, d), (d, \bar{u}, d), (s, \bar{u}, d) \end{aligned}$$

### 3.1.1 Masselose Endzustände

Integriert man Gl. (3.2) über den physikalisch möglichen Phasenraum, erhält man für einen masselosen Endzustand die Rate

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2m_b} \frac{m_b^2}{16(2\pi)^3} \int_0^1 dx_1 \int_{1-x_1}^1 dx_2 \frac{1}{2} \sum_{s_b s_1 s_2 s_3} A^* A \\ &= \frac{1}{2m_b} \frac{m_b^2}{16(2\pi)^3} 4G_F^2 |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 4m_b^4 \int_0^1 dx_1 x_1 (1-x_1) \int_{1-x_1}^1 dx_2 \\ &= \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit

$$x_1 = 2 \frac{p_b \cdot p_1}{m_b^2} \quad (3.4)$$

$$x_2 = 2 \frac{p_b \cdot p_2}{m_b^2} \quad (3.5)$$

Die Grenzen der Phasenraumintegration werden in Anhang A hergeleitet und angegeben. Mit der teilweise sehr groben Näherung, dass alle möglichen Endzustände masselos sind, ergibt sich für den Zerfall des  $b$ -Quark also:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} \left( (|V_{cb}|^2 + |V_{ub}|^2) (n_l + n_c (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2)) \right) \quad (3.6)$$

mit

$$n_l = 3 \text{ der Anzahl der semi-leptonischen Endzustände}$$

$$n_c = 3 \text{ der Anzahl der Farben}$$



und für den Zerfall des  $c$ -Quark:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} ( (|V_{cs}|^2 + |V_{cd}|^2) (n_l + n_c (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|)) ) \quad (3.7)$$

hier ist

$$n_l = 2$$

$$n_c = 3$$

Mit

$$|V_{cb}| = 0,04$$

$$|V_{ub}| = 0,003$$

$$|V_{ud}| = 0,975$$

$$|V_{us}| = 0,22$$

$$|V_{cs}| = 0,974$$

$$|V_{cd}| = 0,22$$

$$BR = \frac{\Gamma_b + \Gamma_c}{(\Gamma^{exp. total})}$$

$$\Gamma^{(exp. total)} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

ergeben sich für verschiedene Massen (in GeV) die folgenden Raten (in eV):

| $m_b$ | $m_c$ | $\Gamma_b$           | $\Gamma_c$           | $\Gamma_b + \Gamma_c$ | $BR$ |
|-------|-------|----------------------|----------------------|-----------------------|------|
| 4,25  | 1,2   | $3,13 \cdot 10^{-4}$ | $2,83 \cdot 10^{-4}$ | $5,96 \cdot 10^{-4}$  | 0,42 |
| 4,731 | 1,323 | $5,35 \cdot 10^{-4}$ | $4,62 \cdot 10^{-4}$ | $10,0 \cdot 10^{-4}$  | 0,70 |
| 4,75  | 1,563 | $5,46 \cdot 10^{-4}$ | $10,6 \cdot 10^{-4}$ | $16,1 \cdot 10^{-4}$  | 1,12 |
| 4,85  | 1,65  | $6,06 \cdot 10^{-4}$ | $13,9 \cdot 10^{-4}$ | $20,0 \cdot 10^{-4}$  | 1,40 |
| 4,918 | 1,491 | $6,50 \cdot 10^{-4}$ | $8,39 \cdot 10^{-4}$ | $14,9 \cdot 10^{-4}$  | 1,04 |
| 5,255 | 1,900 | $9,05 \cdot 10^{-4}$ | $28,2 \cdot 10^{-4}$ | $37,2 \cdot 10^{-4}$  | 2,60 |

Zur Wahl der Massen:

(4,25 / 1,2) werden in Ref. [22] als  $\overline{MS}$ -Massen für  $b$  und  $c$  genannt.

(4,731 / 1,323) reproduzieren das Massenspektrum der Charmonium- und Bottonium-Systeme, wenn man die Schrödingergleichung mit dem Potential  $V_J$  löst.

(4,75 / 1,563) reproduzieren  $M_{J/\psi}$  bzw.  $M_\Upsilon$ , wenn man die Schrödingergleichung mit dem Coulomb-Potential löst.

(4,85 / 1,65) werden in Ref. [22] als  $\overline{MS}$  genannt.

(4,918 / 1,491) reproduzieren das Massenspektrum der Charmonium- und

Bottonium-Systeme, wenn man die Schrödingergleichung mit dem Richardson-Potential löst.

(5,255 / 1,900) reproduzieren das Massenspektrum der Charmonium- und Bottonium-Systeme, wenn man die Schrödingergleichung mit dem Potential  $V_{total}$  löst.

Die phänomenologischen Potentiale werden in Abschnitt (3.3) näher beschrieben und finden sich in Anhang B. Ihr genaues Aussehen ist an dieser Stelle nicht so wichtig. Entscheidend ist eine gewisse Rechtfertigung für die Wahl gerade dieser Massen.

Man sieht, dass bei den meisten (mit gewissem Recht) gewählten Massen ein viel zu großes Verzweigungsverhältnis herauskommt. Für ein verlässlicheres Ergebnis muss man also berücksichtigen, dass einige Endzustände praktisch nicht als masselos genähert werden können.

### 3.1.2 Massive Endzustände

Wieder ausgehend von Gl. (3.2) ist die Rate in der Näherung der Fermi-Theorie jetzt

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 m_q^5}{192\pi^3} \int_{x_1=2r_1}^{1+r_1^2-(r_2+r_3)^2} dx_1 x_1 (1 - r_2^2 + r_1^2 - r_3^2 - x_1) \int_{x_2^-}^{x_2^+} dx_2 \quad (3.8)$$

( $r_i = \frac{m_i}{M}$ ,  $x_i = 2\frac{P \cdot p_i}{M^2}$ , „q“ = „b“, „c“)

Wobei die Grenzen der  $x_2$ -Integration

$$x_2^\pm = \frac{(2 - x_1)^2 + (2 - x_1)(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - 1)}{2(1 + r_1^2 - x_1)} \pm \frac{\sqrt{(x_1^2 - 4r_1^2)((1 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 - x_1)^2 - 4r_2^2 r_3^2)}}{2(1 + r_1^2 - x_1)} \quad (3.9)$$

sind (siehe hierzu auch Anhang A).

Es bleibt also als nicht-triviale Integration

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 m_q^5}{192\pi^3} \int_{x_1=2r_1}^{1+r_1^2-(r_2+r_3)^2} dx_1 x_1 (1 - r_2^2 + r_1^2 - r_3^2 - x_1) \frac{\sqrt{(x_1^2 - 4r_1^2)((1 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 - x_1)^2 - 4r_2^2 r_3^2)}}{(1 + r_1^2 - x_1)} \quad (3.10)$$

Für  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $r_3 > 0$  also z.B. „1“= $\nu_e$ , „2“= $e$  und „3“= $c$  ist das verbleibende Integral

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 m_q^5}{192\pi^3} 12 \int_{x_1=0}^{1-r_3^2} dx_1 \frac{x_1^2 (1-r_3^2-x_1)^2}{(1-x_1)} \quad (3.11)$$

analytisch leicht lösbar und man erhält für einen bestimmten Endzustand:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{3b}|^2 |V_{12}|^2 m_q^5}{192\pi^3} (1 - 8r_3^2 + 8r_3^6 - r_3^8 - 24r_3^4 \ln(r_3)) \quad (3.12)$$

(wie es z.B. auch in Ref. [29] angegeben ist.)

Betrachtet man nun das schwerste Teilchen im Endzustand als massiv, die anderen beiden als masselos, erhält man für den Zerfall des  $b$

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_b^5}{192\pi^3} \left( |V_{cb}|^2 (2f_{cb} + f_{\tau b} + 3f_{cb}(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{cd}|^2)) \right. \\ \left. + |V_{ub}|^2 (1 + f_{\mu b} + f_{\tau b} + 3(|V_{ud}|^2 + f_{sb}|V_{us}|^2 + f_{cb}|V_{cd}|^2)) \right) \quad (3.13)$$

und für den Zerfall des  $c$

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_c^5}{192\pi^3} \left( |V_{cs}|^2 (f_{sc} + f_{\mu c} + 3f_{sc}(|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2)) \right. \\ \left. + |V_{cd}|^2 (1 + f_{\mu c} + 3(|V_{ud}|^2 + f_{sc}|V_{us}|^2)) \right) \quad (3.14)$$

Wobei

$$m_s = 0,1 \text{ GeV} \quad (3.15)$$

$$m_\mu = 0,106 \text{ GeV} \quad (3.16)$$

$$m_\tau = 1,776 \text{ GeV} \quad (3.17)$$

$$m_u = m_d = m_e = m_\nu = 0 \text{ GeV} \quad (3.18)$$

$$f_{12} = 1 - 8 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 8 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^6 \\ - \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^8 - 24 \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^4 \ln \frac{m_1}{m_2} \quad (3.19)$$

sind.

In diesem Falle ergibt sich (mit den gleichen  $CKM$ -Parameterwerten wie im letzten Abschnitt und ebenso mit den Massen in GeV und den Raten in eV) folgende Tabelle:

| $m_b$ | $m_c$ | $\Gamma_b$           | $\Gamma_c$           | $\Gamma_b + \Gamma_c$ | $BR$ |
|-------|-------|----------------------|----------------------|-----------------------|------|
| 4,25  | 1,2   | $2,31 \cdot 10^{-4}$ | $2,69 \cdot 10^{-4}$ | $5,01 \cdot 10^{-4}$  | 0,35 |
| 4,731 | 1,323 | $4,04 \cdot 10^{-4}$ | $4,42 \cdot 10^{-4}$ | $8,46 \cdot 10^{-4}$  | 0,59 |
| 4,75  | 1,563 | $3,93 \cdot 10^{-4}$ | $10,3 \cdot 10^{-4}$ | $14,2 \cdot 10^{-4}$  | 0,99 |
| 4,85  | 1,65  | $4,34 \cdot 10^{-4}$ | $13,5 \cdot 10^{-4}$ | $17,9 \cdot 10^{-4}$  | 1,25 |
| 4,918 | 1,491 | $4,83 \cdot 10^{-4}$ | $8,10 \cdot 10^{-4}$ | $12,9 \cdot 10^{-4}$  | 0,90 |
| 5,255 | 1,900 | $6,43 \cdot 10^{-4}$ | $27,6 \cdot 10^{-4}$ | $34,0 \cdot 10^{-4}$  | 2,38 |

Für  $m_c = 1,9$  GeV kann das  $c$ -Quark auch in ein  $\tau$ -Lepton zerfallen, da die Massendifferenz (zwischen  $c$  und  $\tau$ ) aber sehr gering ist, spielt dies für die Rate praktisch keine Rolle.

Zwar sehen die Verzweigungsverhältnisse nun sehr viel „realistischer“ aus, dennoch gibt es eine große Streuung. Insbesondere die offensichtlich unsinnigen Verzweigungsverhältnisse größer Eins stören.

Sind alle drei Massen größer Null, bleibt nur die numerische Integration. Der Gewinn an Genauigkeit, den man erhält, wenn man die Massen der Teilchen im Endzustand nicht vernachlässigt, geht völlig unter in der Unsicherheit der Quarkmassen von  $b$  und  $c$ . Zumindest aber erhält man eine Aussage über die Häufigkeit der einzelnen Endzustände:

Zerfall des  $b$ -Quark (bei  $m_b = 4,25$  GeV):

$$\begin{aligned}
(e, \bar{\nu}_e, u) &: 0,28\% & (d, \bar{u}, u) &: 0,80\% & (\mu, \bar{\nu}_\mu, u) &: 0,28\% \\
(s, \bar{u}, u) &: 0,04\% & (e, \bar{\nu}_e, c) &: 15,36\% & (d, \bar{c}, u) &: 0,02\% \\
(d, \bar{u}, c) &: 43,80\% & (\mu, \bar{\nu}_\mu, c) &: 15,25\% & (s, \bar{c}, u) &: 0,43\% \\
(s, \bar{u}, c) &: 2,21\% & (\tau, \bar{\nu}_\tau, u) &: 0,08\% & (d, \bar{c}, c) &: 0,95\% \\
(s, \bar{c}, c) &: 18,28\% & (\tau, \bar{\nu}_\tau, c) &: 2,22\% & &
\end{aligned}$$

Zerfall des  $\bar{c}$  (bei  $m_c = 1,2$  GeV):

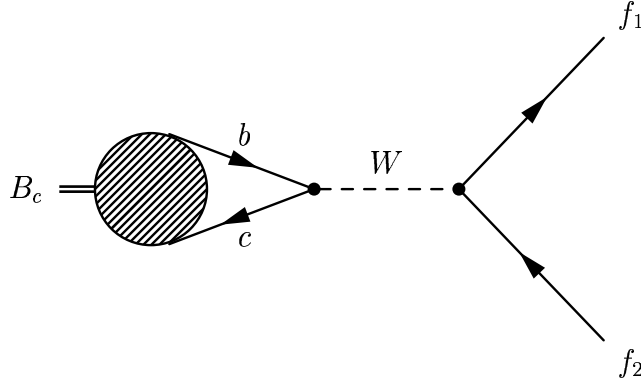
$$\begin{aligned}
(\bar{\nu}_e, e, \bar{d}) &: 1,07\% & (\bar{u}, d, \bar{d}) &: 3,05\% & (\bar{\nu}_\mu, \mu, \bar{d}) &: 1,00\% \\
(\bar{u}, s, \bar{d}) &: 0,14\% & (\bar{\nu}_e, e, \bar{s}) &: 19,26\% & (\bar{u}, d, \bar{s}) &: 54,91\% \\
(\bar{\nu}_\mu, \mu, \bar{s}) &: 18,01\% & (\bar{u}, s, \bar{s}) &: 2,55\% & &
\end{aligned}$$

Die restlichen Massen wurden gewählt, wie in (3.15) - (3.18) angegeben. Die Integrationen wurden numerisch mit Hilfe des Vegas-Algorithmus [30, 31] und unter Berücksichtigung aller Ordnungen in  $(\frac{m_q}{m_W})^2$  durchgeführt. D.h. die Amplitude ist in diesem Fall:

$$A = -\frac{4\pi\alpha}{2\sin^2(\theta_W)} iV_{3b}V_{12}^*\bar{u}_3\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_b \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p_W^\mu p_W^\nu}{m_W^2}}{p_W^2 - m_W^2} \bar{u}_1\gamma_\nu \frac{1-\gamma_5}{2} v_2 \quad (3.20)$$

## 3.2 Annihilationszerfall

Bei allen Annihilationszerfällen gilt bezüglich eines zusätzlichen Farbfaktors die Argumentation aus Abschnitt (2.1.2). Zum Ergebnis der elektroschwachen Rechnung kommt folglich immer noch ein Faktor 3 zur Rate bzw.  $\sqrt{3}$  zur Amplitude hinzu.



Obiger Graph steht für folgende Amplitude:

$$A = -\sqrt{\frac{3}{2\pi M}} iG_F V_{cb} V_{12}^* \phi^{L=0}(0) \bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} v_2$$

$$Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} (\not{P} + M) \begin{pmatrix} -\gamma_5 \\ -\not{\epsilon} \end{pmatrix} \right] \text{ für } \begin{pmatrix} \text{Singlett} \\ \text{Triplett} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.2.1 Masseloser Endzustand

Die Singlett-Zerfallsrate verschwindet wegen Stromerhaltung. (Technisch ausgedrückt, kann die Spur in Gl. (3.21) nur proportional zu  $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$  sein.  $\bar{u}_1(\not{p}_1 + \not{p}_2)(1-\gamma_5)v_2$  verschwindet aber wegen der Dirac-Gleichung).

Für  $J=1$  dagegen wird mit  $|V_{12}| = 1$  die Rate

$$\Gamma = \frac{|V_{cb}|^2}{4\pi^2} (M^2 G_F)^2 \frac{|\phi(0)|^2}{M^3} M = 260,6 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \quad (3.22)$$

(Der Farbfaktor 3 taucht nicht mehr explizit auf, da er sich gegen den Faktor  $1/3$  kürzt, der durch die Mittelung bei der Polarisationssumme in die Rechnung eingeht.)

### 3.2.2 Massiver Endzustand

Typischerweise befinden sich ein Tau-Lepton und sein Neutrino im Endzustand. D.h. zumindest eines der beiden Teilchen im Endzustand hat eine

Masse, die man nicht vernachlässigen kann. Das Matrixelement bzw. die Amplitude (3.21) verschwindet dann auch für  $J = 0$  nicht. Sondern mit der Dirac-Gleichung wird

$$A = -\sqrt{\frac{3}{2\pi M}} i G_F V_{cb} V_{12}^* \phi^{L=0}(0) \bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} v_2 \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} (\not{P} + M) (-\gamma_5) \right] \quad (3.23)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{2\pi M}} i G_F V_{cb} V_{12}^* \phi^{L=0}(0) \bar{u}_1 (\not{p}_1 + \not{p}_2) (1 - \gamma_5) v_2 \quad (3.24)$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{2\pi M}} i G_F V_{cb} V_{12}^* \phi^{L=0}(0) (m_1 \bar{u}_1 (1 - \gamma_5) v_2 - m_2 \bar{u}_1 (1 + \gamma_5) v_2) \quad (3.25)$$

und mit  $r_i = m_i/M$ :

$$A^* A = \frac{6M^3}{\pi} G_F^2 |V_{cb}|^2 |V_{12}|^2 (r_1^2 + r_2^2) \left( 2 \frac{P \cdot p_1}{M^2} - 2r_1^2 \right) \quad (3.26)$$

Beim Zwei-Teilchen-Zerfall besteht der physikalische Phasenraum nur aus einem einzigen Punkt:

$$2 \frac{P \cdot p_1}{M^2} = 1 + r_1^2 - r_2^2 \quad (3.27)$$

siehe dazu auch Anhang A.

In den meisten Fällen ist eine der beiden Massen so klein, dass sie vernachlässigt werden kann. Dann ergibt sich für die Rate:

$$\Gamma = \frac{3}{8\pi^2} r^2 (1 - r^2)^2 (M^2 G_F)^2 |V_{cb}|^2 \frac{|\phi(0)|^2}{M^3} M \quad (3.28)$$

Dies ist in Übereinstimmung mit Ref. [18].

Der massenabhängige Faktor  $r^2(1 - r^2)^2$  (mit  $r = \frac{m_{>}}{M}$ ) hat sein Maximum bei  $r_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Dies entspricht hier  $m_{>} = 3,7$  GeV. Am nächsten an diesem Wert liegen das  $b$ -Quark und eben das  $\tau$ -Lepton. Der  $(b, \bar{u})$  Endzustand ist jedoch stark  $CKM$ -unterdrückt. Weiterhin gibt es noch zwei weniger stark  $CKM$ -unterdrückte Endzustände, die ein  $c$ -Quark enthalten.

Unter Berücksichtigung der Farb- und  $CKM$ -Faktoren ergibt sich (Die Masse

des jeweils leichteren Teilchens wird vernachlässigt.):

$$\Gamma_{\bar{c},s} = 36,40 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 25,5 \cdot 10^{-3} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.29)$$

$$\Gamma_{\tau,\bar{\nu}_\tau} = 25,66 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 17,9 \cdot 10^{-3} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.30)$$

$$\Gamma_{\bar{c},d} = 1,86 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 1,3 \cdot 10^{-3} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.31)$$

$$\Gamma_{\mu,\bar{\nu}_\mu} = 106 \cdot 10^{-9} \text{ eV} = 74,4 \cdot 10^{-6} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{s,\bar{u}} = 13,8 \cdot 10^{-9} \text{ eV} = 9,68 \cdot 10^{-6} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.33)$$

$$\Gamma_{b,\bar{u}} = 2,59 \cdot 10^{-9} \text{ eV} = 1,81 \cdot 10^{-6} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.34)$$

$$\sum \Gamma = 64,04 \cdot 10^{-6} \text{ eV} = 44,78 \cdot 10^{-3} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.35)$$

( $m_b=4,25 \text{ GeV}$ ,  $m_c=1,2 \text{ GeV}$ ,  $m_s=0,1 \text{ GeV}$ ,  $\Gamma_{B_c}^{exp.total}=1,43 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ )

Variiert man die Masse des  $c$ -Quarks, ergeben sich die folgenden Werte für das Verzweigungsverhältnis ( $BR=\Gamma/\Gamma_{B_c}^{exp.total}$ ):

| $m_c$ in GeV | BR                    |
|--------------|-----------------------|
| 1,2          | $44,78 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,323        | $50,05 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,491        | $57,74 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,563        | $61,17 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,65         | $65,42 \cdot 10^{-3}$ |
| 1,9          | $77,00 \cdot 10^{-3}$ |

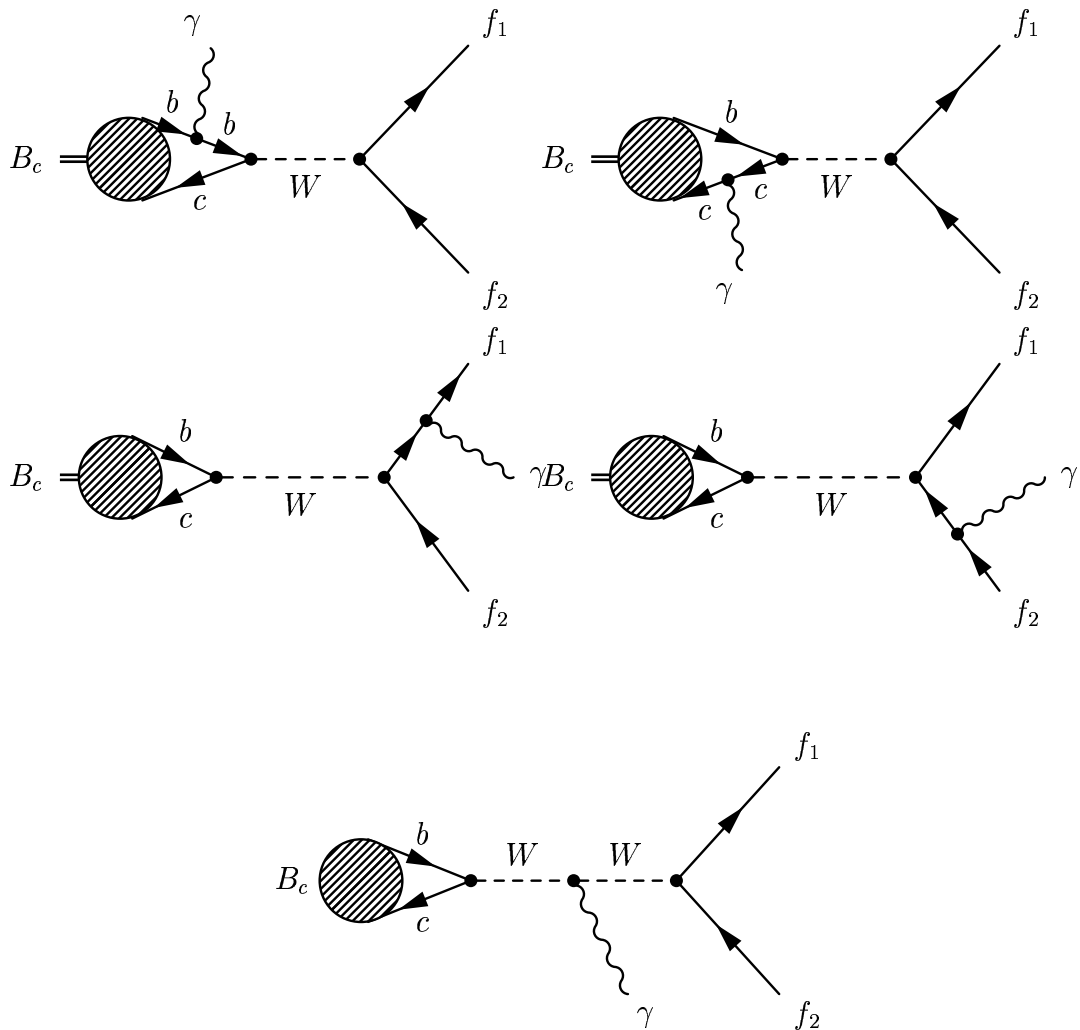
Das analytische Ergebnis für zwei massive Teilchen lautet:

$$\Gamma = \frac{3}{8\pi^2} (r_1^2 + r_2^2) (1 - (r_1^2 + r_2^2)) \sqrt{(1 - (r_1^2 + r_2^2))^2 - 2r_1^2 r_2^2} (M^2 G_F)^2 |V_{cb}|^2 |V_{12}|^2 \frac{|\phi(0)|^2}{M^3} M \quad (3.36)$$

Für  $\Gamma_{\bar{c},s}$  (die Rate mit dem größten Verhältnis  $\frac{m_{<}}{m_{>}} \cong \frac{1}{12}$ ) ist der Fehler, der sich durch Vernachlässigen der kleineren Masse ergibt, unter 1% (0,74%).

Zum Vergleich: Derselbe Fehler in dieser Rate ergibt sich auch für  $m_c = 1,2005 \text{ GeV}$  statt  $m_c = 1,2000 \text{ GeV}$ .

### 3.2.3 QED-Korrekturen zur Annihilation mit masselosem Endzustand



Da für den Zerfall des  $^1S_0$ -Grundzustandes der Born-Prozess bei masselosem Endzustand keinen Beitrag zur Zerfallsrate liefert, müssen die reellen QED-Korrekturen endlich sein, denn die Interferenzterme der virtuellen Korrekturen mit dem Born-Graphen wären von gleicher Ordnung, müssten also mit berücksichtigt werden, verschwinden aber mit der Born-Amplitude.

Das Matrixelement ist dann:



$$\begin{aligned}
A = & \sqrt{3}\epsilon_{\gamma\rho}^* \bar{v}_c(p_c) (-ieQ_c\gamma^\rho) \frac{i}{\not{p}_\gamma - \not{p}_c - m_c} \frac{-ieV_{cb}}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} u_b(p_b) \\
& \frac{i\left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{W\mu}p_{W\nu}}{m_W^2}\right)}{p_W^2 - m_W^2} \bar{u}_1(p_1) \left(\frac{-ieV_{12}^*}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2}\right) v_2(p_2) \\
& + \sqrt{3}\bar{v}_c(p_c) \frac{-ieV_{cb}}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{i}{\not{p}_b - \not{p}_\gamma - m_b} (-ieQ_b\gamma^\rho) u_b(p_b) \epsilon_{\gamma\rho}^* \\
& \frac{i\left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{W\mu}p_{W\nu}}{m_W^2}\right)}{p_W^2 - m_W^2} \bar{u}_1(p_1) \left(\frac{-ieV_{12}^*}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2}\right) v_2(p_2) \\
& + \sqrt{3}\bar{v}_c \left(-\frac{ieV_{cb}}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\right) u_b \frac{i\left(-g_{\mu\rho} + \frac{P_\mu P_\rho}{m_W^2}\right)}{M^2 - m_W^2} \\
& ie\left((-p_\gamma + p_W)^\rho g^{\sigma\alpha} + (-p_W - P)^\alpha g^{\rho\sigma} + (P + p_\gamma)^\sigma g^{\rho\alpha}\right) \\
& \epsilon_{\gamma\alpha}^* \frac{i\left(-g_{\sigma\nu} + \frac{p_{W\nu}p_{W\sigma}}{m_W^2}\right)}{p_W^2 - m_W^2} \bar{u}_1 \left(\frac{ieV_{12}^*}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\nu \frac{1-\gamma_5}{2}\right) v_2 \\
& + \sqrt{3}\bar{v}_c \left(-\frac{ieV_{cb}}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\right) u_b \frac{i\left(-g_{\mu\rho} + \frac{P_\mu P_\rho}{m_W^2}\right)}{M^2 - m_W^2} \\
& \bar{u}_1 \left(\frac{-ieV_{12}^*}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2}\right) \frac{i}{\not{p}_1 - \not{P}} (-ieQ_2 \not{\epsilon}_\gamma^*) v_2 \\
& + \sqrt{3}\bar{v}_c \left(-\frac{ieV_{cb}}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\right) u_b \frac{i\left(-g_{\mu\rho} + \frac{P_\mu P_\rho}{m_W^2}\right)}{M^2 - m_W^2} \\
& \bar{u}_1 (-ieQ_1 \not{\epsilon}_\gamma) \frac{i}{\not{p}_1 + \not{p}_\gamma} \left(\frac{-ieV_{12}^*}{\sqrt{2}\sin\theta_W} \gamma^\rho \frac{1-\gamma_5}{2}\right) v_2
\end{aligned}$$

Hierbei sind die Faktoren  $\sqrt{3}$  wieder die in den voran gegangenen Abschnitten erwähnten Farbfaktoren.  $m_W^2$  ist sehr viel größer als  $M^2$  oder die Skalarprodukte der Impulse, die im Bereich von  $M^2$  liegen. Die Entwicklung in  $\frac{M^2}{m_W^2}$

$$\begin{aligned}
A = & -i\sqrt{3} \frac{e^3 V_{cb} V_{12}^*}{2 \sin^2 \theta_W m_W^2} \left( \frac{Q_c}{(p_\gamma - p_c)^2 - m_c^2} (\bar{v}_c \not{\epsilon}_\gamma^* (\not{p}_\gamma - \not{p}_c + m_c) \gamma_\nu^L u_b) (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu v_2) \right. \\
& + \frac{Q_b}{(p_b - p_\gamma)^2 - m_b^2} (\bar{v}_c \gamma_\nu^L (\not{p}_b - \not{p}_\gamma + m_b) \not{\epsilon}_\gamma^* u_b) (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu v_2) \\
& - \frac{Q_2}{(P - p_1)^2} (\bar{v}_c \gamma_\nu^L u_b) (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu (\not{P} - \not{p}_1) \not{\epsilon}_\gamma^* v_2) \\
& \left. + \frac{Q_1}{(p_1 + p_\gamma)^2} (\bar{v}_c \gamma_\nu^L u_b) (\bar{u}_1 \not{\epsilon}_\gamma^* (\not{p}_1 + \not{p}_\gamma) \gamma_L^\nu v_2) \right) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

führt auf die Amplitude der vier-Fermion-Wechselwirkung in der Fermi-Theorie. Hierbei ist  $\epsilon$  die Polarisation des Photons,  $p_i$  ist der Impuls des Teilchens „ $i$ “,  $Q_i$  ist die zu Teilchen „ $i$ “ gehörende Ladung (in Einheiten von  $e$ ) und

$$\gamma_L^\mu = \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2}. \quad (3.38)$$

Der Beitrag des Tripel-Eichboson-Graphen ist vollständig mit  $\frac{M^2}{m_W^2}$  unterdrückt und taucht daher in der niedrigsten Ordnung in  $\frac{M^2}{m_W^2}$  gar nicht auf. Die Projektion auf den  $L = 0$  Zustand führt auf:

$$\begin{aligned} A = & - \sqrt{3}ie2\sqrt{2}G_F V_{cb}V_{12}^* \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\phi(0)}{\sqrt{M}} \\ & \left( - M \frac{Q_c (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu v_2)}{(2m_c)(p_\gamma P)} Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma^* \left( \not{p}_\gamma - \frac{m_c}{M} (\not{P} - M) \right) \gamma_\nu^L (\not{P} + M) (-\gamma_5) \right] \right. \\ & - M \frac{Q_b (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu v_2)}{(2m_b)(p_\gamma P)} Tr \left[ \gamma_\nu^L \left( \frac{m_b}{M} (\not{P} + M) - \not{p}_\gamma \right) \not{\epsilon}_\gamma^* (\not{P} + M) (-\gamma_5) \right] \\ & - \frac{Q_2}{(P - p_1)^2} Tr \left[ \gamma_\nu^L (\not{P} + M) (-\gamma_5) \right] (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu (\not{P} - \not{p}_1) \not{\epsilon}_\gamma^* v_2) \\ & \left. + \frac{Q_1}{(p_1 + p_\gamma)^2} Tr \left[ \gamma_\nu^L (\not{P} + M) (-\gamma_5) \right] (\bar{u}_1 \not{\epsilon}_\gamma^* (\not{p}_1 + \not{p}_\gamma) \gamma_L^\nu v_2) \right) \quad (3.39) \end{aligned}$$

Sei nun der Gesamtdrehimpuls  $J = 0$ . Dann lassen sich die beiden letzteren Terme noch vereinfachen, denn die Spur in diesen Termen ergibt schlicht  $-2P_\nu$ . Mit  $P = p_1 + p_2 + p_\gamma$  und der Dirac-Gleichung folgt dann:

$$\begin{aligned} A = & - \sqrt{3}ie2\sqrt{2}G_F V_{cb}V_{12}^* \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\phi(0)}{\sqrt{M}} (\bar{u}_1 \gamma_L^\nu v_2) \\ & \left( - M \frac{Q_c}{(2m_c)(p_\gamma P)} Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma^* \left( \not{p}_\gamma - \frac{1 - R_{as}}{2} (\not{P} - M) \right) \gamma_\nu^L (\not{P} + M) (-\Xi) \right] \right. \\ & - M \frac{Q_b}{(2m_b)(p_\gamma P)} Tr \left[ \gamma_\nu^L \left( \frac{m_b}{M} (\not{P} + M) - \not{p}_\gamma \right) \not{\epsilon}_\gamma^* (\not{P} + M) (-\Xi) \right] \\ & \left. + 2(Q_1 - Q_2) \not{\epsilon}_{\gamma\nu}^* \right) \quad (3.40) \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Amplitude (bis auf  $CKM$ -Faktoren) nicht davon abhängt, ob das  $B_c^-$  in leptoniche oder hadronische Endzustände zerfällt. Es gilt in

jedem Fall  $Q_1 - Q_2 = -1$ . Die Rate ist nun:

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \frac{M^2}{16(2\pi)^3} \int_0^1 dx_\gamma \int_{1-x_\gamma}^1 dx_1 A^*(x_1, x_\gamma) A(x_1, x_\gamma) \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{2M} \frac{M^2}{16(2\pi)^3} \int_0^1 dx_\gamma \int_{1-x_\gamma}^1 dx_1 \frac{16}{3} \alpha G_F^2 |V_{cb}|^2 |V_{12}|^2 |\phi^{L=0}(0)|^2 \frac{M}{m_b^2 m_c^2} \frac{(2m_b - m_c)^2 (1 - x_\gamma) (m_c^2 (1 - x_1)^2 + m_b^2 (x_1 + x_\gamma - 1)^2)}{x_\gamma^2} \quad (3.42)$$

mit den Integrationsvariablen

$$x_\gamma = 2 \frac{P \cdot p_\gamma}{M^2} \quad (3.43)$$

$$x_1 = 2 \frac{P \cdot p_1}{M^2}, \quad (3.44)$$

so dass man am Ende (mit  $R_{as} = 0,54$  und  $V_{cb} = 0,04$ )

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{(1 + 3R_{as})^2 (1 + R_{as}^2)}{432\pi^3 (1 - R_{as}^2)^2} |V_{cb}|^2 \alpha (G_F M^2)^2 \frac{|\phi(0)|^2}{M^3} M \\ &= \frac{(2m_b - m_c)^2 (m_b^2 + m_c^2)}{864\pi^3 (m_b m_c)^2} |V_{cb}|^2 \alpha (G_F M^2)^2 \frac{|\phi(0)|^2}{M^3} M \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$= 99,0 \cdot 10^{-9} \text{ eV} = 69,2 \cdot 10^{-6} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \text{ f\"ur } |V_{12}| = 1 \quad (3.46)$$

erh\"alt.

Betrachtet man die m\"oglichen Endzust\"ande  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ ,  $(\mu^-, \bar{\nu}_\mu)$ ,  $(\tau^-, \bar{\nu}_\tau)$ ,  $(d, \bar{u})$ ,  $(s, \bar{u})$ ,  $(d, \bar{c})$ ,  $(s, \bar{c})$  alle als masselos und vernachl\"assigt den  $CKM$ - und Phasenraum-unterdr\"uckten Endzustand  $(b, \bar{u})$ , ergibt sich mit  $(n_l = n_c = 3)$  folglich noch ein Faktor  $n_l + n_c (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{cd}|^2 + |V_{cs}|^2) = 8,99$  und somit:

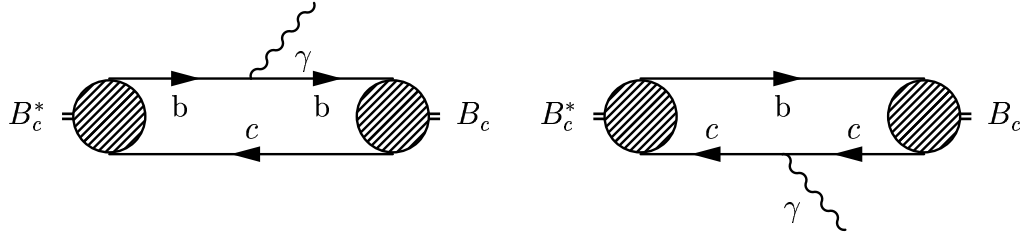
$$\Gamma = 890 \cdot 10^{-9} \text{ eV} = 0,622 \cdot 10^{-3} \Gamma_{B_c}^{exp.total} \quad (3.47)$$

Die Beitr\"age der Graphen mit Abstrahlung im Anfangs- und Endzustand sind jeweils drei bis viermal so gro\ss wie die Gesamtrate und heben sich teilweise gegenseitig auf.

Um etwa einen Faktor vier bis neun (je nach Wahl der Massen) ist die hier errechnete Rate dann auch zus\"atzlich zu  $\alpha$  gegen\"uber der gesamten Born-Rate mit massivem Endzustand unterdr\"uckt, wobei dies nicht urs\"achlich miteinander zu tun haben muss.

F\"ur  $J = 1$  tritt eine Infrarotsingularit\"at in der Photonenergie auf. (Dies ist m\"oglich, da der Bornterm f\"ur  $J = 1$  ein endliches Resultat lieferte.) Um ein endliches Ergebnis zu erhalten, m\"ussten die Interferenzterme von Propagator-, Bein-, Vertex-, und Boxkorrekturen mit dem Born-Prozess ber\"ucksichtigt werden.

### 3.3 Der Strahlungsübergang $B_c^*$ ( ${}^3S_1$ ) nach $B_c$ ( ${}^1S_0$ )



Hier ist sowohl der Anfangs- als auch der Endzustand ein Bindungszustand. Die Relativimpulse sind über den Impuls des Photons miteinander verknüpft. Die Energie des Photons wiederum ist durch die Massen des Triplett- und Singlettzustandes fest vorgegeben. Es treten keine Farbfaktoren auf - bzw. die Farbfaktoren heben sich gegenseitig auf. Der Grund hierfür ist, dass man zwei Faktoren  $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$  aus den Normierungen der beiden Farb-Singlett-Zustände und jeweils einen Faktor  $N_c$  aus den Amplituden definierter Farbe aus Anfangs- und Endzustand bekommt. Der resultierende Faktor  $N_c$  wird jedoch dadurch wieder aufgehoben, dass Spuren über zwei Projektoren auf unterschiedliche Farb-Antifarb-Kombinationen, wie z.B.  $Tr[r \otimes \bar{r}b \otimes \bar{b}] = 0$  verschwinden, und somit nur  $\frac{1}{N_c}$  der möglichen Kombinationen beitragen.

Die beiden Quarks im Endzustand werden mit „3“ (für das  $b$ -Quark) und „4“ bezeichnet.

Da bei Abstrahlung vom  $b$ -Quark

$$p_3 = p_b - q \quad (3.48)$$

$$p_4 = p_c \quad (3.49)$$

und bei Abstrahlung vom  $\bar{c}$ -Quark

$$p_3 = p_b \quad (3.50)$$

$$p_4 = p_c - q \quad (3.51)$$

gilt, gilt mit den Relativimpulsen im Triplett- bzw. Singlett

$$p_{(t/s)} = \frac{m_c p_{(b/3)} - m_b p_{(c/4)}}{M} \quad (3.52)$$

im ersten Fall

$$p_s = p_t - \frac{m_c}{M} q \quad (3.53)$$

und im letzteren Fall

$$p_s = p_t + \frac{m_b}{M}q \quad (3.54)$$

Die Rate ist dann (z.B. nach Ref. [6]):

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2M_t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0} \int \frac{d^3P_s}{(2\pi)^3 2P_s^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_t - P_s - q) \\ & \left| \frac{\sqrt{2M_t}}{\sqrt{2m_b}\sqrt{2m_c}} \frac{\sqrt{2M_s}}{\sqrt{2m_b}\sqrt{2m_c}} \int \frac{d^3p_t}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c^*}(\vec{p}_t) \right. \\ & \left( \Psi_{B_c^*}^*\left(\vec{p}_t - \frac{m_c}{M}\vec{q}\right) \langle \gamma, p_t - \frac{m_c}{M}q | J_b^{(elm.)} | p_t \rangle \right. \\ & \left. \left. + \Psi_{B_c}^*\left(\vec{p}_t + \frac{m_b}{M}\vec{q}\right) \langle \gamma, p_t + \frac{m_b}{M}q | J_c^{(elm.)} | p_t \rangle \right) \right|^2 \quad (3.55) \end{aligned}$$

Wobei  $q$  den Photonimpuls,  $p$  den Relativimpuls und  $P_s$ ,  $P_t$ ,  $M_s$  und  $M_t$  den Schwerpunktimпульs bzw. die Masse des Anfangs-(Triplet-) bzw. End-(Singlett-)Zustandes bezeichnen.  $\mu$  ist wieder die reduzierte Masse, die (als globaler Vorfaktor) für beide Zustände gleich angenommen wird. Die Normierungen sind

$$\Psi(\vec{p}) = \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{r}} \Phi(\vec{r}) \quad (3.56)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{r}} \Psi(\vec{p}) \quad (3.57)$$

$$1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\Psi(\vec{p})|^2 = \int d^3x |\Phi(\vec{r})|^2 \quad (3.58)$$

für die Wellenfunktion im Ortsraum ( $\Phi$ ) und im Impulsraum ( $\Psi$ ).

Bleiben noch die Matrixelemente. Diese sind auf Quarkenebene:

$$\begin{aligned} \langle \gamma, p_t^c - \frac{m_c}{M} q | J_b^{(elm.)} | p_t^c \rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_c^0 + m_c}} \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b - q^0}} \frac{1}{\sqrt{p_c^0 + m_c}} \\ &eQ_b Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma (m_b + \not{p}_b) \left( \frac{M_t + \not{P}_t}{2\sqrt{2}M_t} \right) \not{\epsilon} (m_c - \not{p}_c) \right. \\ &\left. (m_c - \not{p}_c) \gamma_5 \left( \frac{M_s + \not{P}_s}{2\sqrt{2}M_s} \right) (m_b + \not{p}_b - \not{q}) \right] \quad (3.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma, p_t^c + \frac{m_b}{M} q | J_c^{(elm.)} | p_t^c \rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_c^0 + m_c}} \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_c^0 + m_c - q^0}} \\ &eQ_c Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma (m_c - \not{p}_c + \not{q}) \gamma_5 \left( \frac{M_t + \not{P}_t}{2\sqrt{2}M_t} \right) (m_b + \not{p}_b) \right. \\ &\left. (m_b + \not{p}_b) \left( \frac{M_s + \not{P}_s}{2\sqrt{2}M_s} \right) \not{\epsilon} (m_c - \not{p}_c) \right] \quad (3.60) \end{aligned}$$

Eine ausführliche Herleitung, wie man von Abschnitt (2.1.1) ausgehend auf diese Amplituden kommt, findet sich im nächsten Abschnitt (3.4).

An dieser Stelle wurde noch nichts genähert. Es wurde nur die Amplitude (für freie Quarks) als Spur geschrieben, und damit die Eigenschaften des Spins der beiden Systeme berücksichtigt.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, zu einem Zahlenwert für die Rate zu gelangen: 1) Man nähert so weit wie möglich, um zu einer analytischen Formel für die Rate zu gelangen oder 2) man setzt (aus der Schrödingergleichung mit verschiedenen Potentialen numerisch errechnete) Wellenfunktionen in die Integrale ein und führt diese (ebenfalls numerisch) aus. Beide Möglichkeiten wurden durchgeführt.

Zunächst zu 1):

Die beiden Bahnwellenfunktionen sind nahezu identisch, da sich die beiden Hamiltonoperatoren nur durch den Hyperfeinwechselwirkungsoperator unterscheiden.

In den bisherigen Rechnungen wurde die Bindungsenergie immer vernachlässigt und es galt  $M = m_b + m_c$ . Damit wären die beiden Zustände gleich schwer. Da die relative Massendifferenz tatsächlich sehr klein ist, ist das auch in Ordnung, solange nicht Differenzen der beiden Massen auftreten. Dies passiert jedoch nur in der Energie des Photons.

Entsprechend Ref. [16] bzw. Abschnitt (2.1.1) möchte man nun eine Entwicklung im Relativimpuls durchführen, um mit dem in  $p_t$  konstanten Term den für S-Wellen dominanten Anteil der Amplitude zu erhalten. Es stellt sich aber die Frage nach dem Entwicklungspunkt. Da die Argumente der Wellenfunktionen unterschiedlich sind, kann man nun nicht von vorneherein

davon ausgehen, dass das Integral für  $p_t = 0$  (relativ zueinander ruhende Quarks) den dominierenden Beitrag liefert. Prinzipiell gibt es drei Möglichkeiten, wenn man zwei gleiche gegeneinander verschobene Funktionen, die nach Unendlich gegen Null abfallen und eindeutige Maxima besitzen, überlagert:

1. Die Produktfunktion hat immer noch zwei Maxima an den ursprünglichen Stellen.
2. Die Produktfunktion hat ein Maximum in der Mitte zwischen den ursprünglichen Maxima.
3. Die Produktfunktion ist nahezu konstant zwischen den ursprünglichen Maxima.

Somit könnte  $p_t = p_t^r \pm \frac{q}{4}$  der richtige Entwicklungspunkt sein. Oder es könnte eine Mittelung zwischen  $p_t = -\frac{m_c}{M}q$  und  $p_t = \frac{m_b}{M}q$  nötig sein. Allgemein kann man  $p_t = -\frac{m_c}{M}q + hq$  mit  $0 \leq h \leq 1$  ansetzen.

Allerdings ist  $Pq \ll P^2$ . Da dies auch die einzigen Skalarprodukte sind, die im Ergebnis auftauchen können, besteht die Hoffnung, dass das Ergebnis nur schwach von der genauen Wahl des Entwicklungspunktes abhängig ist. (D.h., dass der dominierende Anteil nicht von  $h$  abhängt.)

Setze also in den Matrixelementen

$p_t = p_t^c := -\frac{m_c}{M}q + hq$  mit  $0 \leq h = \text{const.} \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M_t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0} \int \frac{d^3P_s}{(2\pi)^3 2P_s^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_t - P_s - q) \\ &\quad \frac{1}{4\mu^2} \left| \langle \gamma, p_t^c - \frac{m_c}{M}q | J_b^{(elm.)} | p_t^c \rangle \int \frac{d^3p_t}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c^*}(\vec{p}_t) \Psi_{B_c}^*(\vec{p}_t - \frac{m_c}{M}\vec{q}) \right. \\ &\quad \left. + \langle \gamma, p_t^c + \frac{m_b}{M}q | J_c^{(elm.)} | p_t^c \rangle \int \frac{d^3p_t}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c^*}(\vec{p}_t) \Psi_{B_c}^*(\vec{p}_t + \frac{m_b}{M}\vec{q}) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Mit  $f = -\frac{m_c}{M}$  oder  $f = \frac{m_b}{M}$  kann man die beiden Relativimpuls-Integrale durch Fouriertransformation der Wellenfunktionen umschreiben:

$$\int \frac{d^3p_t}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c^*}(\vec{p}_t) \Psi_{B_c}^*(\vec{p}_t + f\vec{q}) = \int d^3x \Phi(\vec{r}) \Phi^*(\vec{r}) e^{-if\vec{q}\vec{r}} \quad (3.62)$$

und wegen der Kugelsymmetrie kann man die Winkelintegration ausführen:

$$\int d^3x \Phi(\vec{r}) \Phi^*(\vec{r}) e^{-if\vec{q}\vec{r}} = \int dr r^2 |\phi(r)|^2 \frac{\sin(fq^0 r)}{fq^0 r}, \quad (3.63)$$

wobei  $\phi$  (im Gegensatz zur vollständigen Wellenfunktion  $\Phi$  im Ortsraum) nur der radiale Anteil der Wellenfunktion ist.

Bei den Matrixelementen steht als Faktor also noch die Fouriertransformierte

der räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeit an der Stelle des halben Photonimpulses. (Anm.: Dies ist nicht die Wahrscheinlichkeit, dass der Relativimpuls gerade  $f\vec{q}$  ist.)

Da  $f\vec{q}\vec{r} \ll 1$  ist (Begründung s.u.), kann man die Exponentialfunktion entwickeln. In erster Näherung bleibt dann nur noch die Norm der Bahnwellenfunktion stehen und diese ist eins.

Somit bleibt für die Rate:

$$\Gamma = \frac{1}{2M_t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0} \int \frac{d^3P_s}{(2\pi)^3 2P_s^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_t - P_s - q) \frac{1}{4\mu^2} \\ \left| \langle \gamma, p_t^c - \frac{m_c}{M} q | J_b^{(elm.)} | p_t^c \rangle + \langle \gamma, p_t^c + \frac{m_b}{M} q | J_c^{(elm.)} | p_t^c \rangle \right|^2 \quad (3.64)$$

Warum kann  $f\vec{q}\vec{r}$  als klein betrachtet werden?

1.  $|\vec{q}| = \frac{M_t^2 - M_s^2}{2M_t} \cong \Delta E_{hf}$
2. Die Energie der Hyperfeinaufspaltung ist nach Ref. [25] und auf die starke Wechselwirkung übertragen ( $\alpha \rightarrow \frac{4}{3}\alpha_s$ ):

$$\Delta E_{hf} = \frac{32\pi}{9} \frac{\alpha_s}{m_b m_c} |\Phi(0)|^2 \quad (3.65)$$

3. Nicht-relativistisch ist  $|\Phi(0)|^2 = \frac{(\mu \frac{4}{3}\alpha_s)^3}{\pi}$ .

4. Folgt man in dieser Begründung bis hier allen Näherungen und Analogien zum H-Atom, so kann man als typischen Abstand auch die starke Entsprechung des Bohr'schen Radius verwenden und  $r = \frac{3}{4\mu\alpha_s}$  setzen, wodurch man (mit  $|f| < 1$ )

$$|f\vec{q}\vec{r}| < f \frac{8\pi}{3} \frac{|\Phi(0)|^2}{\mu^2 M} = f \left(\frac{8}{3}\right)^4 \alpha_s^3 \frac{\mu}{M} = \frac{f}{2} \alpha_s^3 (1 - R_{a_s}^2) < \cong 6,8 \cdot 10^{-3} \quad (3.66)$$

erhält. (bei  $\alpha_s = 0.2$ )

Der Beitrag der ersten Korrektur ist folglich sehr klein.

Vergleicht man das nicht-relativistische  $|\Phi(0)|^2 = \frac{(\mu \frac{4}{3}\alpha_s)^3}{\pi}$  mit dem  $|\phi(0)|^2 = 1,144 \text{ GeV}^3$  aus Abschnitt 2.1.2 (Achtung, dort handelt es sich nur um die Radialwellenfunktion.), so ergibt sich ca. ein Faktor 10 Unterschied in den beiden Werten. Mit  $|\phi(0)|^2 = 1,144 \text{ GeV}^3$  ist  $|f\vec{q}\vec{r}| < \cong 0,22$  immer noch klein. Insbesondere weil wegen der sphärischen Symmetrie die Dipolkorrektur verschwindet und als erster Korrekturterm

$$\frac{1}{6} \int dr r^2 \left(\frac{q^0 r}{2}\right)^2 |\phi(0)|^2 \quad (3.67)$$



bleibt, ist die Näherung gut.

Da das  $\phi(0)$  aus Abschnitt (2.1.2) bessere Ergebnisse für die Hyperfeinaufspaltung liefert (im Bereich 40 MeV, Vergl. auch Ref. [18] S.15), kann man davon ausgehen, dass die nicht-relativistische Näherung für die Wellenfunktion am Ursprung um ca. einen Faktor 10 falsch ist und somit die erste Korrektur um mehr als einen Faktor  $0,22^2 \cong 0,05$  unterdrückt ist.

Bleibt noch zu zeigen, dass das Herausziehen der Matrixelemente aus den Integralen in Gl. (3.61) gerechtfertigt ist. Hierzu schreibt man die Matrixelemente (3.59) und (3.60) mit Hilfe von

$$p_b = \frac{m_b}{M}P - \frac{m_c}{M}q + hq \quad (3.68)$$

$$p_c = \frac{m_c}{M}P + \frac{m_c}{M}q - hq \quad (3.69)$$

( $|h| < 1$ ) um, berechnet die auftretenden Spuren und erhält in Gl. (3.64) eine Rate, die proportional ist zu:

$$\Gamma \propto \left( Q_b \left( \frac{m_c}{M}(1 + R^2) + h(1 - R^2) \right) + Q_c \left( 2\frac{m_b}{M} + \frac{m_c}{M}(1 - R^2) - h(1 - R^2) \right) \right)^2 \quad (3.70)$$

Man erkennt sofort, dass  $h$  nur als Faktor vor  $(1 - R^2)$  auftritt. Mit  $R$  als dem Verhältnis der Massen der beiden Zustände, ist  $(1 - R^2)$  klein gegen  $4\frac{m_{b,c}}{M}$ . Es ist also tatsächlich unbedeutend, um welche Stelle genau zwischen  $p^r$  und  $p^r \pm \frac{1}{2}q$  der Relativimpuls entwickelt wird. Anders ausgedrückt: In dem Bereich, in dem das Produkt der Wellenfunktionen möglicherweise eine Mittelung über verschiedene Relativimpulse nötig machen würde, sind die Matrixelemente nahezu konstant. Nun kann man die Matrixelemente (3.59) und (3.60) vereinfachen und (jetzt mit  $h = \frac{m_c}{M}$ ) im Relativimpuls entwickeln (d.h. die Quarks im Anfangszustand werden als ruhend genähert:

$(m_q \pm \not{p}_q) \rightarrow m_q(1 \pm \gamma_0)$ ,  $q = b, c$ ), um dies anschließend in die Rate in Gl. (3.64) einzusetzen:

$$\begin{aligned} \langle \gamma, p_t^c - \frac{m_c}{M}q | J_b^{(elm.)} | p_t^c \rangle &\cong \frac{1}{2m_b} \frac{1}{2m_c} \frac{1}{4} m_c e Q_b Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma (m_b + \not{p}_b)(1 + \gamma_0) \right. \\ &\quad \left. \not{\epsilon} (m_c - \not{p}_c) \gamma_5 (1 + \gamma_0) (m_b + \not{p}_b - \not{q}) \right] \\ &\cong \frac{1}{16m_b} e Q_b Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma m_b (1 + \gamma_0) (1 + \gamma_0) \not{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. m_c (1 - \gamma_0) \gamma_5 (1 + \gamma_0) (m_b + \not{p}_b - \not{q}) \right] \\ &\cong \frac{m_c}{2} e Q_b Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma \not{\epsilon} \gamma_5 \gamma_0 (m_b \gamma_0 - \not{q}) \right] \\ &\cong -\frac{m_c}{2} e Q_b Tr \left[ \not{\epsilon}_\gamma \not{\epsilon} \gamma_0 \not{q} \gamma_5 \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}
\langle \gamma, p_t^c + \frac{m_b}{M} q | J_c^{(elm.)} | p_t^c \rangle &\cong \frac{1}{2m_b} \frac{1}{2m_c} \frac{1}{4} m_b e Q_c \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\gamma (m_c - \not{p}_c + \not{A}) \gamma_5 \right. \\
&\quad \left. (1 + \gamma_0) (m_b + \not{p}_b) (1 + \gamma_0) \not{\epsilon} (m_c - \not{p}_c) \right] \\
&\cong \frac{1}{16m_c} e Q_c \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\gamma (m_c - \not{p}_c + \not{A}) \gamma_5 (1 + \gamma_0) \right. \\
&\quad \left. m_b (1 + \gamma_0) (1 + \gamma_0) \not{\epsilon} m_c (1 - \gamma_0) \right] \\
&\cong \frac{m_b}{2} e Q_c \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\gamma (-m_c \gamma_0 + \not{A}) \gamma_5 \gamma_0 \not{\epsilon} \right] \\
&\cong -\frac{m_b}{2} e Q_c \text{Tr} \left[ \not{\epsilon} \not{\epsilon}_\gamma \not{A} \gamma_0 \gamma_5 \right] \quad (3.72)
\end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass der Tripletzustand transversal polarisiert ist und somit  $\{\not{\epsilon}, \gamma_0\} = 0$  gilt. auch wurde in der Spinornorm  $m_{b,c} - q^0 \cong m_{b,c}$  genähert.

Der physikalische Phasenraum besteht nur aus einem Punkt:

$$x_1 = 2 - x_\gamma \quad (3.73)$$

$$x_\gamma = 1 - R^2 := 1 - \frac{M_s^2}{M_t^2} \quad (3.74)$$

Die Rate ist dann:

$$\Gamma = \frac{1}{2M_t} \frac{1 - R^2}{8\pi} \frac{1}{4\mu^2} \pi \alpha (m_b m_c)^2 \frac{8}{3} M^2 x_\gamma^2 \left( \frac{Q_b}{m_b} + \frac{Q_c}{m_c} \right)^2 \quad (3.75)$$

$$= \frac{M^3 \alpha}{24} (1 - R^2)^3 \left( \frac{Q_b}{m_b} + \frac{Q_c}{m_c} \right)^2 \quad (3.76)$$

$$= \frac{4}{3} \alpha \left( \frac{Q_b}{2m_b} + \frac{Q_c}{2m_c} \right)^2 q_0^3 \quad (3.77)$$

$$\cong \frac{4}{3} \alpha \left( \frac{Q_b}{1 + R_{as}} + \frac{Q_c}{1 - R_{as}} \right)^2 \left( \frac{\Delta E_{hf}}{M} \right)^3 M \quad (3.78)$$

$$= \frac{4}{27} \alpha \frac{(1 + 3R_{as})^2}{(1 - R_{as}^2)^2} \left( \frac{\Delta E_{hf}}{M} \right)^3 M \quad (3.79)$$

Gleichung (3.77) entspricht exakt dem Ergebnis aus Ref. [32].

Weiterhin kann man noch Gleichung (3.65) einsetzen:

$$\Gamma = \frac{2^{17} (1 + 3R_{as})^2}{3^9 (1 - R_{as}^2)^5} \left( \frac{|\phi(0)|^2}{M^3} \right)^3 \alpha_s^3 \alpha M \quad (3.80)$$

$$= 7,95 \text{ eV} \quad (3.81)$$

wobei  $\alpha_s = 0, 2$ ,  $\alpha = \frac{1}{137}$ ,  $M = 6, 4$  GeV und  $R_{as} = 0, 54$ .

In der Literatur [33, 18, 23] findet man  $\Gamma = 0, 02$  keV,  $\Gamma = 0, 060$  keV bzw.  $\Gamma = 0, 135$  keV. Die großen Unterschiede haben ihren Ursprung in der hohen Abhängigkeit des Ergebnisses von  $\phi(0)$ , bzw.  $q^0$  oder  $\Delta E_{hf}$ .

Abschließend zeigt ein Blick auf die Amplituden (3.71) und (3.72), dass diese sich weitgehend vereinfachen lassen:

$$-\frac{m_c}{2}eQ_bTr \left[ \not{\epsilon}_\gamma \not{\epsilon}\gamma_0 \not{A}\gamma_5 \right] = -2eQ_b m_c (\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_\gamma)) \quad (3.82)$$

$$-\frac{m_b}{2}eQ_cTr \left[ \not{\epsilon} \not{\epsilon}_\gamma \not{A}\gamma_0\gamma_5 \right] = -2eQ_c m_b (\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_\gamma)) \quad (3.83)$$

Dies kann man weiter umschreiben. Verwende dazu:

$$\vec{\epsilon} = (0, 0, 1) \text{ für } S = 0 \quad (3.84)$$

$$\vec{\epsilon} = (\mp 1, -i, 0) \text{ für } S = \pm 1 \quad (3.85)$$

$$\vec{q} = (\cos \phi \sin \vartheta, \sin \phi \sin \vartheta, \cos \vartheta) \quad (3.86)$$

$$\vec{\epsilon}_{\gamma,1} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0) \cos \rho + (\cos \phi \cos \vartheta, \sin \phi \cos \vartheta, -\sin \vartheta) \sin \rho \quad (3.87)$$

$$\vec{\epsilon}_{\gamma,2} = -(\sin \phi, -\cos \phi, 0) \sin \rho + (\cos \phi \cos \vartheta, \sin \phi \cos \vartheta, -\cos \vartheta) \cos \rho \quad (3.88)$$

(mit beliebigem  $\rho$ )

Damit wird

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,1}) = q_0 \cos \rho \sin \vartheta \text{ für } S = 0 \quad (3.89)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,1}) = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (\pm \cos \vartheta \cos \rho + i \sin \rho) e^{\pm i\varphi} \text{ für } S = \pm 1 \quad (3.90)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,2}) = -q_0 \sin \rho \sin \vartheta \text{ für } S = 0 \quad (3.91)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,2}) = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (\mp \cos \vartheta \sin \rho + i \cos \rho) e^{\pm i\varphi} \text{ für } S = \pm 1 \quad (3.92)$$

was sich durch die Wahl  $\rho = \frac{\pi}{2}$  vereinfachen lässt zu

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,1}) = 0 \text{ für } S = 0 \quad (3.93)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,1}) = i \frac{q_0}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi} \text{ für } S = \pm 1 \quad (3.94)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,2}) = -q_0 \sin \vartheta \text{ für } S = 0 \quad (3.95)$$

$$\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_{\gamma,2}) = \mp \frac{q_0}{\sqrt{2}} \cos \vartheta e^{\pm i\varphi} \text{ für } S = \pm 1 \quad (3.96)$$

betragsquadriert und alle Kombinationen aufsummiert ergibt sich

$$\frac{1}{3} \sum_{\epsilon, \epsilon_\gamma} |\vec{q} \cdot (\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}_\gamma)|^2 = \frac{2}{3} q_0^2 \quad (3.97)$$

was letztlich wieder auf die bereits berechnete Rate führt.

**Numerisch** wurde die Schrödingergleichung mit einem Programm gelöst, das den Numerov-Fox-Goodwin Algorithmus (Ref. [34, 35]) verwendet. Die Rechnung wurde für die folgenden Potentiale durchgeführt:  
Das Coulombpotential

$$V_{Coul} = -\frac{\frac{4}{3}\alpha_s}{r} \quad (3.98)$$

da die analytische Näherung (3.77) an die QED mit ihrem Coulombpotential angelehnt war,  
das Richardsonpotential (Ref. [36]):

$$\tilde{V}(\bar{q}^2) = -\frac{4}{3} \frac{12\pi}{33 - 2n_f} \frac{1}{\bar{q}^2} \frac{1}{\ln(1 + \bar{q}^2/\Lambda^2)} \quad (3.99)$$

$$V(r) = \frac{8\pi}{33 - 2n_f} \Lambda \left( \Lambda r - \frac{f(\Lambda r)}{\Lambda r} \right) \quad (3.100)$$

$$f(\Lambda r) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{\sin(q\Lambda r)}{q} \left[ \frac{1}{\ln(1 + q^2)} - \frac{1}{q^2} \right] \quad (3.101)$$

$$\Lambda = 398 \text{ MeV} \quad (3.102)$$

sowie  $V_{total}$  (Ref. [37])

$$V_{total} = -\frac{16\pi}{25} \frac{1}{r f(r)} \left[ 1 + \frac{2\gamma_E + \frac{53}{75}}{f(r)} - \frac{462 \ln(f(r))}{625 f(r)} \right] + a\sqrt{r} + c \quad (3.103)$$

mit

$$f(r) = \ln \left( \frac{1}{(\Lambda_{\overline{MS}} r)^2} + b \right) \quad (3.104)$$

$$a = 0,63 \text{ GeV}^{3/2} \quad (3.105)$$

$$b = 20 \quad (3.106)$$

$$c = -1,39 \text{ GeV} \quad (3.107)$$

$$\Lambda_{\overline{MS}} = 0,14 \text{ GeV} \quad (3.108)$$

$$\gamma_E \cong 0,5772 \text{ Eulerkonstante} \quad (3.109)$$

und  $V_J$  (Ref. [38, 39])

$$V_J = -\frac{16\pi}{25} \frac{1}{r f(r)} \left[ 1 + \frac{2\gamma_E + \frac{53}{75}}{f(r)} - \frac{462 \ln(f(r))}{625 f(r)} \right] + d r e^{-gr} + a r \quad (3.110)$$

mit

$$f(r) = \ln \left( \frac{1}{(\Lambda_{\overline{MS}} r)^2} + b \right) \quad (3.111)$$

$$a = 0,159 \text{ GeV}^2 \quad (3.112)$$

$$b = 20 \quad (3.113)$$

$$g = 0,344 \text{ GeV} \quad (3.114)$$

$$d = 0,255 \text{ GeV}^2 \quad (3.115)$$

$$\Lambda_{\overline{MS}} = 0,2 \text{ GeV} \quad (3.116)$$

$$\gamma_E \cong 0,5772 \text{ Eulerkonstante} \quad (3.117)$$

Siehe hierzu auch die Plots der Potentiale in Anhang B: Abb. (B.1) - Abb. (B.3) Bei der Berechnung der Wellengleichung wurde im Hamiltonoperator auch hier der Hyperfeinterm vernachlässigt. Die Verschiebung im Impulsraum hingegen wurde berücksichtigt. Die Wellenfunktionen (Abb.(B.5) in Anhang B) für Triplett und Singlett sind also gleich.

Alle Parameter sind so gewählt, dass die experimentell gemessenen Massen von  $J/\Psi$  bzw.  $\eta_c$  und  $\Upsilon$  bzw.  $\eta_b$  und deren Anregungszustände im Rahmen der Genauigkeit, die durch das Vernachlässigen des Hyperfeintermes möglich ist, reproduziert werden. In gleicher Weise werden für jedes Potential die Quarkmassen  $m_b$  und  $m_c$  bestimmt.

Es ergeben sich folgende Massen:

| Potential  | $m_b/\text{GeV}$ | $m_c/\text{GeV}$ |
|------------|------------------|------------------|
| Coulomb    | 4,750            | 1,563            |
| Richardson | 4,918            | 1,491            |
| Total      | 5,255            | 1,900            |
| J          | 4,731            | 1,323            |

Für die Festlegung von  $m_b$  wurde mit  $n_f = 4$ , für  $\alpha_s(M_{B_c})$  und die Festlegung von  $m_c$  hingegen mit  $n_f = 3$  gerechnet.

Zum Vergleich: Mit diesen Quarkmassen und Potentialparametern ergeben sich folgende Massen (in GeV) für die nS  $J/\Psi$  Zustände:

| Zustand | $V_{Rich}$ | $V_{total}$ | $V_J$   | [22]                  |
|---------|------------|-------------|---------|-----------------------|
| 1S      | 3,09554    | 3,09707     | 3,09550 | $3,09687 \pm 0,00004$ |
| 2S      | 3,68489    | 3,68920     | 3,68990 | $3,68596 \pm 0,00009$ |
| 3S      | 4,09660    | 4,05831     | 4,08220 | $4,040 \pm 0,010$     |

bzw. die  $\Upsilon$  Zustände:

| Zustand | $V_{Rich}$ | $V_{total}$ | $V_J$   | [22]                   |
|---------|------------|-------------|---------|------------------------|
| 1S      | 9,45977    | 9,46010     | 9,46071 | $9,4603 \pm 0,00026$   |
| 2S      | 10,0636    | 10,0096     | 10,0283 | $10,02326 \pm 0,00031$ |
| 3S      | 10,4165    | 10,3438     | 10,3519 | $10,3552 \pm 0,0005$   |

NB: Für die Massen der verschiedenen  $B_c$  Zustände ergibt sich (in GeV):

| Zustand | $V_{Rich}$ | $V_{total}$ | $V_J$ |
|---------|------------|-------------|-------|
| 1S      | 6,373      | 6,320       | 6,345 |
| 2P      | 6,788      | 6,732       | 6,769 |
| 2S      | 6,937      | 6,893       | 6,925 |
| 3D      | 7,055      | 7,006       | 7,042 |
| 3P      | 7,186      | 7,128       | 7,158 |
| 3S      | 7,311      | 7,248       | 7,281 |

Die Potentiale bei den jeweils entsprechenden  $\Upsilon$  und  $J/\Psi$ -Energien sind zusammen mit den Orts- und Impulsraum Wellenfunktionen in Anhang B abgebildet.

Setzt man für die Massendifferenz zwischen Triplet und Singlettzustand  $\Delta M = 100$  MeV, erhält man für die Übergangsrate ( $\Gamma_{T \rightarrow S}$  in eV):

| Potential  | numerisches Resultat | (3.77)  |
|------------|----------------------|---------|
| Coulomb    | 442,13               | 297,096 |
| Richardson | 431,52               | 336,858 |
| Total      | 197,01               | 193,360 |
| J          | 629,34               | 439,701 |

für  $\Delta M = 50$  MeV:

| Potential  | numerisches Resultat | (3.77) |
|------------|----------------------|--------|
| Coulomb    | 51,378               | 37,872 |
| Richardson | 53,973               | 42,929 |
| Total      | 24,702               | 24,645 |
| J          | 79,247               | 56,039 |

und für  $\Delta M = 10$  MeV:

| Potential  | numerisches Resultat | (3.77)  |
|------------|----------------------|---------|
| Coulomb    | 0,39249              | 0,30781 |
| Richardson | 0,43334              | 0,34883 |
| Total      | 0,19867              | 0,20029 |
| J          | 0,63571              | 0,45539 |

In der dritten Spalte steht der Wert, der sich ergibt, wenn man in Gleichung (3.77) die entsprechenden Werte für die Quarkmassen, mit denen die jeweilige numerische Rechnung durchgeführt wurde, einsetzt. Die Vegasintegration (Ref. [30, 31]) wurde in allen Fällen mit  $10^7$  Stützstellen und 20 Iterationen durchgeführt. Die Relativimpulse wurden bis  $p_{cut} = 40$  GeV integriert. Dort liegt der Wert der Impulswellenfunktion (im Falle des Richardsonpotentials) nur noch bei ca.  $7 \cdot 10^{-8}$  mal dem Wert des Maximums am Ursprung.

Die Ergebnisse variieren stark. Betrachtet man die Plots in Anhang B, findet man sehr ähnliche Wellenfunktionen bei unterschiedlichen Potentialen und Quarkmassen. Die Ergebnisse der numerischen Integration hängen also nur sehr wenig von den gewählten Wellenfunktionen und viel stärker von den Quarkmassen und natürlich der (gewählten) Energie des Photons, die nahezu der Hyperfeinaufspaltung entspricht, ab.

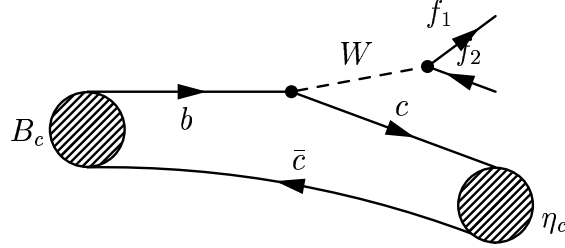
Die numerischen Ergebnisse weichen nur wenig von der  $q_0^3$ -Abhängigkeit aus Gleichung (3.77) ab.

### 3.4 Der Zerfall $B_c \rightarrow \eta_c l \nu_l$

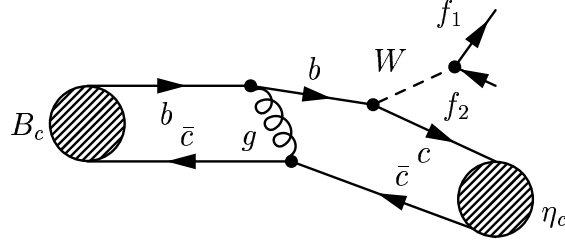
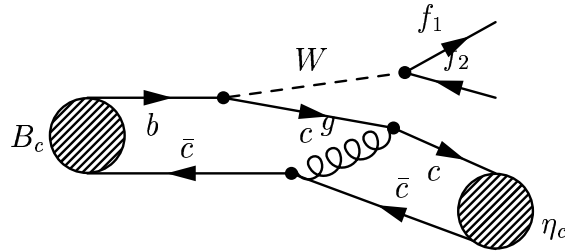
Im Gegensatz zum Strahlungsübergang  $B_c^* \rightarrow B_c$  ist jetzt der Rückstoß nicht mehr vernachlässigbar. Das bedeutet auch, dass die Wellenfunktionen signifikant gegeneinander verschoben sind. Zudem gibt es zwei Energiebereiche, die getrennt betrachtet werden müssen:

Der „weiche“ Bereich, in dem man alle Gluonen als bereits im Potential berücksichtigt betrachtet, und der „harte“ Bereich, in dem der Prozess im Wesentlichen durch ein hartes Gluon vermittelt wird.

Der Feynmangraph zum weichen Prozess:



Die Feynmangraphen, die ein hartes Gluon enthalten, sind:



Zunächst **der harte Anteil des Zerfalls**  $B_c \rightarrow \text{Charmonium}$  :

Durch das Gluon sind die beiden Relativimpulse (im  $B_c$  und im Charmonium) prinzipiell unabhängig von einander. Damit kann man auch auf beide unabhängig voneinander den Formalismus aus Abschnitt (2.1.1) anwenden. Ganz allgemein sieht die Amplitude dann so aus:

$$A = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{2\mu_J} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3\vec{p}_J}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Psi(\vec{p}) \Psi_J(\vec{p}_J) \bar{v}_c O_1 v_4 \bar{u}_3 O_2 u_b \quad (3.118)$$

Folgt man Abschnitt (2.1.1), ist dies unmittelbar:

$$A = \frac{1}{2\mu_J} \int \frac{d^3\vec{p}_J}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Psi(\vec{p}_J) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\phi^{L=0}(0)}{\sqrt{M}} \text{Tr} [(O_1 v_4 \otimes \bar{u}_3 O_2) |_{(p=0)} (P + M) \Pi_{SS_Z}] \quad (3.119)$$



wenn das  $B_c$  in einem Bahndrehimpuls  $L = 0$  Zustand ist.

Größen, die in beiden Mesonen auftauchen, sind mit einem Index „ $J$ “ versehen, wenn sie sich auf das Charmonium beziehen und haben keinen zusätzlichen Index, wenn sie sich auf das  $B_c$  beziehen. So z.B.: die Mesonmasse  $M$ , der Relativimpuls  $p$ , der Gesamtimpuls  $P$ , die Wellenfunktion im Impulsraum  $\Psi$ , der radiale Anteil der Wellenfunktion im Ortsraum am Ursprung  $\phi^{L=0}(0)$ , die reduzierte Masse  $\mu$  und der Projektor  $\Pi_{SS_z}$ . Die vier Fermionen im Endzustand sind durchnummeriert: „1“ und „2“ bezeichnen die (masselosen) Fermionen, die aus dem Zerfall des  $W$  entstehen, „3“ bezeichnet das  $c$ -Quark im Charmonium, das aus dem Zerfall des  $b$ -Quarks hervor geht. „4“ schließlich bezeichnet das  $\bar{c}$ -Quark, das auch im  $B_c$  schon ein solches war. Entsprechend sind auch die Spinoren  $\bar{u}_1, v_2, \bar{u}_3$  und  $v_4$  zuzuordnen. Die beiden  $O$  werden durch den Prozess bestimmt und unten angegeben. Gl. (3.119) formt man um:

$$A = \frac{1}{2\mu_J} \int \frac{d^3\vec{p}_J}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \Psi(\vec{p}_J) \frac{1}{2} \frac{\phi^{L=0}(0)}{\sqrt{4\pi}} \frac{\phi^{L=0}(0)}{\sqrt{M}} \text{Tr}[(O_2(\not{P} + M)\Pi_{SS_z}O_1)v_4 \otimes \bar{u}_3] \Big|_{p=0} \quad (3.120)$$

und erhält eine Amplitude genau in der Art von Gl. (2.20). Hierdurch wird es möglich, alle Entwicklungsschritte wie in Abschnitt (2.1.1) ein zweites Mal durchzuführen. Der einzige Unterschied ist, dass man nicht verschiedene  $u \otimes \bar{v}$ , sondern das adjungierte  $v \otimes \bar{u}$  aufzusummieren hat. Folglich und nach Gl. (2.29) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_{s\bar{s}} \langle s, \bar{s} | S, S_z \rangle v_4(0, s) \otimes \bar{u}_3(0, \bar{s}) \\ &= \sum_{s\bar{s}} \langle s, \bar{s} | S, S_z \rangle \overline{u_3(0, \bar{s}) \otimes v_4(0, s)} \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \overline{(1 + \gamma_0)\Pi_{SS_z}} \quad (3.122)$$

$$= -\overline{\Pi_{J,SS_z}} \frac{1 + \gamma_0}{2\sqrt{2}} \quad (3.123)$$

Im Ruhesystem des Charmonium!

Dies ergibt,

$$A = -\kappa \text{Tr}[O_2(\not{P} + M)\Pi_{SS_z}O_1\overline{\Pi_{J,SS_z}}(\not{P}_J + M_J)]_{p=p_J=0} \quad (3.124)$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{1}{4} \frac{1}{4\pi} \frac{\phi^{L=0}(0)\phi_J^{L=0}(0)}{\sqrt{MM_J}} \quad (3.125)$$

Die freie Amplitude für diesen Prozess wäre nun:

$$\mathcal{A} = -\mathcal{C}\bar{u}_1\gamma_\nu^L v_2 \bar{v}_c\gamma^\mu v_4 \frac{1}{q_g^2}\bar{u}_3 \left( \gamma_\mu \frac{1}{\not{k}_c - m_c} \gamma_L^\nu + \gamma_L^\nu \frac{1}{\not{k}_b - m_b} \gamma_\mu \right) u_b \quad (3.126)$$

$$\text{mit } \mathcal{C} = \frac{4}{3}4\pi\alpha_s 2\sqrt{2}G_F V_{cb} \quad (3.127)$$

wobei hierin bereits über die Gell-Mann-Matrizen summiert  $\lambda_a\lambda_b\delta_{ab} = \frac{16}{3}$  und der  $W$ -Propagator mit Fermis 4-Fermion-Wechselwirkung genähert wurde.  $Q$ ,  $q_g$ ,  $q_b$  und  $q_c$  sind die Impulse der vier inneren Teilchen  $W$ -Boson, Gluon,  $b$ - und  $c$ -Quark.

Damit sind die Operatoren (bis auf die Konstante  $\mathcal{C}$ )

$$O_1^\mu = \gamma^\mu \quad (3.128)$$

$$O_{2\mu}^\nu = \frac{1}{q_g^2} \left( \frac{1}{q_c^2 - m_c^2} \gamma_\mu (\not{k}_c + m_c) \gamma_L^\nu + \frac{1}{q_b^2 - m_b^2} \gamma_L^\nu (\not{k}_b + m_b) \gamma_\mu \right). \quad (3.129)$$

was in nullter Ordnung der Relativimpulse, d.h. mit

$$p_b = \frac{m_b}{M}P \quad (3.130)$$

$$p_c = \frac{m_c}{M}P \quad (3.131)$$

$$p_3 = \frac{1}{2}P_J \quad (3.132)$$

$$p_4 = \frac{1}{2}P_J \quad (3.133)$$

$$q_b = P - \frac{1}{2}P_J \quad (3.134)$$

$$q_c = P_J - \frac{m_c}{M}P \quad (3.135)$$

$$q_g = \frac{m_c}{M}P - \frac{1}{2}P_J \quad (3.136)$$

zu

$$O_{10}^\mu = \gamma^\mu \quad (3.137)$$

$$O_{2\mu 0}^\nu = \frac{1}{\left(\frac{m_c}{M}P - \frac{1}{2}P_J\right)^2} \left( \frac{1}{\left(P_J - \frac{m_c}{M}P\right)^2 - m_c^2} \gamma_\mu \left(P_J - \frac{m_c}{M}P + m_c\right) \gamma_L^\nu + \frac{1}{\left(P - \frac{1}{2}P_J\right)^2 - m_b^2} \gamma_L^\nu \left(P - \frac{1}{2}P_J + m_b\right) \gamma_\mu \right) \quad (3.138)$$

$$= 2 \frac{M}{M_J} \frac{1}{(MM_J - P_J)^2} \left( \frac{M}{M_J} \gamma_\mu \left( (M_J + P_J) - \frac{1}{2} \frac{M_J}{M} (M - P) \right) \gamma_L^\nu + \gamma_L^\nu \left( (M + P) - \frac{1}{2} (M_J + P_J) \right) \gamma_\mu \right) \quad (3.139)$$

wird. Ab hier wird der Index „0“ bei den Operatoren weggelassen. Die Operatoren verstehen sich ab jetzt immer in nullter Ordnung Relativimpuls.

Hierbei wurden

$$m_c = \frac{M_J}{2} \quad (3.140)$$

$$m_b = M - \frac{M_J}{2} \quad (3.141)$$

gesetzt.

In  $O_{2\mu}^\nu$  deutet sich auch schon das Problem der Divergenz für  $P_J = (M_J, \vec{0})$  an. Es kommt dadurch zustande, dass die Nenner der drei Propagatoren proportional zueinander sind:

$$q_g^2 = \frac{1}{2} \frac{M_J}{M} (q_b^2 - m_b^2) \quad (3.142)$$

$$q_c^2 - mc^2 = \frac{M_J}{M} (q_b^2 - m_b^2) \quad (3.143)$$

$$q_b^2 - m_b^2 = MM_J - P \cdot P_J \quad (3.144)$$

Mit den Operatoren (3.137) und (3.139), den Konstanten  $\kappa$  und  $\mathcal{C}$ , dem auslaufenden Strom aus Gl. (3.126) und der Amplitude (3.124) wird für den

Übergang  ${}^1B_c$  nach  $\eta_c$

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 s_2} A^* A &= |\kappa|^2 |\mathcal{C}|^2 \text{Tr} \left[ \gamma_\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} \not{p}_2 \gamma_\sigma \frac{1 - \gamma_5}{2} \not{p}_1 \right] \\ &\quad \text{Tr} [O_{2\mu}^\nu (\not{P} + M) \gamma_5 O_1^\mu \gamma_5 (\not{P}_J + M_J)] \\ &\quad (\text{Tr} [O_{2\rho}^\sigma (\not{P} + M) \gamma_5 O_1^\rho \gamma_5 (\not{P}_J + M_J)])^* \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} &= 1024 |\kappa|^2 |\mathcal{C}|^2 \\ &\quad \frac{(2 - 2r_J + x_J)^2 ((1 - x_1)(x_1 + x_J - 1) - r_J^2)}{r_J^2 (x_J - 2r_J)^4} \end{aligned} \quad (3.146)$$

wobei  $s_1$  und  $s_2$  die Spins der auslaufenden Fermionen „1“ und „2“ sind und

$$x_1 = 2 \frac{P \cdot p_1}{M^2} \quad (3.147)$$

$$x_J = 2 \frac{P \cdot P_J}{M^2} = 1 + \frac{M_J^2}{M^2} - \frac{Q^2}{M^2} \quad (3.148)$$

$$r_J = \frac{M_J}{M} \quad (3.149)$$

ist. Somit ist die Rate:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} \frac{M^2}{16(2\pi)^3} |\kappa|^2 |\mathcal{C}|^2 1024 \\ &\quad \int_{2r_J}^{1+r_J^2} dx_J \int_{x_1^-}^{x_1^+} dx_1 \frac{(2 - 2r_J + x_J)^2 ((1 - x_1)(x_1 + x_J - 1) - r_J^2)}{r_J^2 (x_J - 2r_J)^4} \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2M} \frac{M^2}{16(2\pi)^3} |\kappa|^2 |\mathcal{C}|^2 \\ &\quad \int_{2r_J}^{1+r_J^2} dx_J \frac{512}{3} \frac{(2 - 2r_J + x_J)^2 (x_J + 2r_J) \sqrt{x_J^2 - 4r_J^2}}{r_J^2 (x_J - 2r_J)^3} \end{aligned} \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{256\pi^3} |\kappa|^2 |\mathcal{C}|^2 \\ &\quad \frac{512}{3} \frac{1}{M^2} \int_0^{M^2(1-r_J)^2} dQ^2 \frac{(3 - \frac{Q^2}{M^2} - 2r_J + r_J^2)^2 ((1 + r_J)^2 - \frac{Q^2}{M^2})}{r_J^2 ((1 - r_J)^2 - \frac{Q^2}{M^2})^3} \\ &\quad \sqrt{\left(1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2\right)^2 - 4r_J^2} \end{aligned} \quad (3.152)$$

wobei

$$x_1^\pm = \frac{1}{2} \left( 2 - x_J \pm \sqrt{x_J^2 - 4r_J^2} \right) \quad (3.153)$$

$$\frac{Q^2}{M^2} = 1 + r_J^2 - x_J \quad (3.154)$$

d.h. also:

$$M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2} = \frac{16}{27\pi^3} \alpha_s^2 (G_F M^2)^2 |V_{cb}|^2 \frac{|\phi^{L=0}(0)|^2}{M^3} \frac{|\phi_J^{L=0}(0)|^2}{M^3} M \frac{(2 - \frac{Q^2}{M^2} + (1 - r_J)^2)^2 ((1 + r_J)^2 - \frac{Q^2}{M^2})}{r_J^3 ((1 - r_J)^2 - \frac{Q^2}{M^2})^3} \sqrt{\left(1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2\right)^2 - 4r_J^2} \quad (3.155)$$

Mit folgenden Parameterwerten

$$G_F = 1,16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (3.156)$$

$$V_{cb} = 0,04 \quad (3.157)$$

$$|\phi^{L=0}(0)|^2 = 1,144 \text{ GeV}^3 \quad (3.158)$$

$$|\phi_J^{L=0}(0)|^2 = 0,4929 \text{ GeV}^3 \quad (3.159)$$

$$M = 6,4 \text{ GeV} \quad (3.160)$$

$$M_{\eta_c} = 2,9792 \text{ GeV} \quad (3.161)$$

$$r_J = \frac{M_{\eta_c}}{M} = 0,4655 \quad (3.162)$$

$$\frac{Q^2}{M^2} = x(1 - r_J)^2 \quad 0 \leq x < 1 \quad (3.163)$$

$$\alpha_s = \alpha_s(M_{B_c}^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln \frac{M_{B_c}^2}{\Lambda^2}} - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln \ln \frac{M_{B_c}^2}{\Lambda^2}}{\ln^2 \frac{M_{B_c}^2}{\Lambda^2}} \quad (3.164)$$

$$= 0,215 \quad (3.165)$$

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$$

$$b_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f$$

$$n_f = 4$$

$$\Lambda = 0,2 \text{ GeV} \quad (3.166)$$

$$(3.167)$$

ergeben sich mit verschiedenen  $x$  die folgenden Werte für die differentielle Rate (3.155)  $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ :

| x    | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV | x    | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV | x    | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV |
|------|-----------------------------------|------|-----------------------------------|------|-----------------------------------|
| 0,00 | $6,3163 \cdot 10^{-14}$           | 0,34 | $1,5266 \cdot 10^{-13}$           | 0,68 | $7,9190 \cdot 10^{-13}$           |
| 0,01 | $6,4479 \cdot 10^{-14}$           | 0,35 | $1,5786 \cdot 10^{-13}$           | 0,69 | $8,5310 \cdot 10^{-13}$           |
| 0,02 | $6,5840 \cdot 10^{-14}$           | 0,36 | $1,6333 \cdot 10^{-13}$           | 0,70 | $9,2142 \cdot 10^{-13}$           |
| 0,03 | $6,7246 \cdot 10^{-14}$           | 0,37 | $1,6908 \cdot 10^{-13}$           | 0,71 | $9,9798 \cdot 10^{-13}$           |
| 0,04 | $6,8700 \cdot 10^{-14}$           | 0,38 | $1,7516 \cdot 10^{-13}$           | 0,72 | $1,0841 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,05 | $7,0204 \cdot 10^{-14}$           | 0,39 | $1,8156 \cdot 10^{-13}$           | 0,73 | $1,1814 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,06 | $7,1760 \cdot 10^{-14}$           | 0,40 | $1,8833 \cdot 10^{-13}$           | 0,74 | $1,2919 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,07 | $7,3371 \cdot 10^{-14}$           | 0,41 | $1,9548 \cdot 10^{-13}$           | 0,75 | $1,4179 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,08 | $7,5040 \cdot 10^{-14}$           | 0,42 | $2,0305 \cdot 10^{-13}$           | 0,76 | $1,5625 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,09 | $7,6769 \cdot 10^{-14}$           | 0,43 | $2,1107 \cdot 10^{-13}$           | 0,77 | $1,7292 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,10 | $7,8561 \cdot 10^{-14}$           | 0,44 | $2,1957 \cdot 10^{-13}$           | 0,78 | $1,9228 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,11 | $8,0419 \cdot 10^{-14}$           | 0,45 | $2,2859 \cdot 10^{-13}$           | 0,79 | $2,1492 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,12 | $8,2347 \cdot 10^{-14}$           | 0,46 | $2,3818 \cdot 10^{-13}$           | 0,80 | $2,4159 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,13 | $8,4347 \cdot 10^{-14}$           | 0,47 | $2,4839 \cdot 10^{-13}$           | 0,81 | $2,7327 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,14 | $8,6424 \cdot 10^{-14}$           | 0,48 | $2,5926 \cdot 10^{-13}$           | 0,82 | $3,1126 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,15 | $8,8582 \cdot 10^{-14}$           | 0,49 | $2,7085 \cdot 10^{-13}$           | 0,83 | $3,5727 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,16 | $9,0824 \cdot 10^{-14}$           | 0,50 | $2,8324 \cdot 10^{-13}$           | 0,84 | $4,1364 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,17 | $9,3156 \cdot 10^{-14}$           | 0,51 | $2,9648 \cdot 10^{-13}$           | 0,85 | $4,8362 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,18 | $9,5582 \cdot 10^{-14}$           | 0,52 | $3,1066 \cdot 10^{-13}$           | 0,86 | $5,7177 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,19 | $9,8106 \cdot 10^{-14}$           | 0,53 | $3,2588 \cdot 10^{-13}$           | 0,87 | $6,8468 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,20 | $1,0074 \cdot 10^{-13}$           | 0,54 | $3,4222 \cdot 10^{-13}$           | 0,88 | $8,3214 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,21 | $1,0347 \cdot 10^{-13}$           | 0,55 | $3,5981 \cdot 10^{-13}$           | 0,89 | $1,0291 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,22 | $1,0633 \cdot 10^{-13}$           | 0,56 | $3,7877 \cdot 10^{-13}$           | 0,90 | $1,2994 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,23 | $1,0931 \cdot 10^{-13}$           | 0,57 | $3,9923 \cdot 10^{-13}$           | 0,91 | $1,6824 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,24 | $1,1242 \cdot 10^{-13}$           | 0,58 | $4,2137 \cdot 10^{-13}$           | 0,92 | $2,2469 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,25 | $1,1567 \cdot 10^{-13}$           | 0,59 | $4,4537 \cdot 10^{-13}$           | 0,93 | $3,1214 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,26 | $1,1906 \cdot 10^{-13}$           | 0,60 | $4,7143 \cdot 10^{-13}$           | 0,94 | $4,5657 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,27 | $1,2261 \cdot 10^{-13}$           | 0,61 | $4,9979 \cdot 10^{-13}$           | 0,95 | $7,1653 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,28 | $1,2632 \cdot 10^{-13}$           | 0,62 | $5,3072 \cdot 10^{-13}$           | 0,96 | $1,2453 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,29 | $1,3020 \cdot 10^{-13}$           | 0,63 | $5,6455 \cdot 10^{-13}$           | 0,97 | $2,5433 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,30 | $1,3427 \cdot 10^{-13}$           | 0,64 | $6,0162 \cdot 10^{-13}$           | 0,98 | $6,9727 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,31 | $1,3854 \cdot 10^{-13}$           | 0,65 | $6,4236 \cdot 10^{-13}$           | 0,99 | $3,9241 \cdot 10^{-9}$            |
| 0,32 | $1,4302 \cdot 10^{-13}$           | 0,66 | $6,8726 \cdot 10^{-13}$           | 1,00 | $\infty$                          |
| 0,33 | $1,4772 \cdot 10^{-13}$           | 0,67 | $7,3688 \cdot 10^{-13}$           |      |                                   |

Nimmt man hingegen  $\alpha_s$  an der Stelle des tatsächlichen Impulsübertrages des Gluons

$$\alpha_s(q_g^2) = \frac{4\pi}{b_0 \ln \frac{q_g^2}{\Lambda^2}} - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln \ln \frac{q_g^2}{\Lambda^2}}{\ln^2 \frac{q_g^2}{\Lambda^2}} \quad (3.168)$$

$$\Lambda = 0,2 \text{ GeV} \quad (3.169)$$

$$b_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad (3.170)$$

$$b_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f \quad (3.171)$$

$$q_g^2 = (p_c - p_4)^2 \cong \left(\frac{m_c}{M}P - \frac{1}{2}P_J\right)^2 \quad (3.172)$$

$$= \frac{M^2}{4}r_J \left(\frac{Q^2}{M^2} - (1 - r_J)^2\right) \quad (3.173)$$

$$n_f = 0 \text{ für } \sqrt{q_g^2} < 0,003 \text{ GeV} \quad (3.174)$$

$$n_f = 1 \text{ für } 0,003 \text{ GeV} \leq \sqrt{q_g^2} < 0,006 \text{ GeV} \quad (3.175)$$

$$n_f = 2 \text{ für } 0,006 \text{ GeV} \leq \sqrt{q_g^2} < 0,1 \text{ GeV} \quad (3.176)$$

$$n_f = 3 \text{ für } 0,1 \text{ GeV} \leq \sqrt{q_g^2} < 1,491 \text{ GeV} \quad (3.177)$$

$$n_f = 4 \text{ für } 1,491 \text{ GeV} \leq \sqrt{q_g^2}; \quad (3.178)$$

$$(3.179)$$

erhält man diese Tabelle:

| x    | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV | x    | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV | x    | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV |
|------|-----------------------------------|------|-----------------------------------|------|-----------------------------------|
| 0,00 | $1,5826 \cdot 10^{-13}$           | 0,34 | $4,8811 \cdot 10^{-13}$           | 0,68 | $4,3007 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,01 | $1,6245 \cdot 10^{-13}$           | 0,35 | $5,0961 \cdot 10^{-13}$           | 0,69 | $4,7621 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,02 | $1,6681 \cdot 10^{-13}$           | 0,36 | $5,3248 \cdot 10^{-13}$           | 0,70 | $5,2940 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,03 | $1,7134 \cdot 10^{-13}$           | 0,37 | $5,5683 \cdot 10^{-13}$           | 0,71 | $5,9106 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,04 | $1,7605 \cdot 10^{-13}$           | 0,38 | $5,8278 \cdot 10^{-13}$           | 0,72 | $6,6296 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,05 | $1,8096 \cdot 10^{-13}$           | 0,39 | $6,1048 \cdot 10^{-13}$           | 0,73 | $7,4732 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,06 | $1,8606 \cdot 10^{-13}$           | 0,40 | $6,4008 \cdot 10^{-13}$           | 0,74 | $8,4702 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,07 | $1,9138 \cdot 10^{-13}$           | 0,41 | $6,7173 \cdot 10^{-13}$           | 0,75 | $9,6572 \cdot 10^{-12}$           |
| 0,08 | $1,9693 \cdot 10^{-13}$           | 0,42 | $7,0564 \cdot 10^{-13}$           | 0,76 | $1,1082 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,09 | $2,0271 \cdot 10^{-13}$           | 0,43 | $7,4201 \cdot 10^{-13}$           | 0,77 | $1,2809 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,10 | $2,0874 \cdot 10^{-13}$           | 0,44 | $7,8107 \cdot 10^{-13}$           | 0,78 | $1,4921 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,11 | $2,1503 \cdot 10^{-13}$           | 0,45 | $8,2308 \cdot 10^{-13}$           | 0,79 | $1,7535 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,12 | $2,2161 \cdot 10^{-13}$           | 0,46 | $8,6834 \cdot 10^{-13}$           | 0,80 | $2,0808 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,13 | $2,2848 \cdot 10^{-13}$           | 0,47 | $9,1715 \cdot 10^{-13}$           | 0,81 | $2,4966 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,14 | $2,3566 \cdot 10^{-13}$           | 0,48 | $9,6990 \cdot 10^{-13}$           | 0,82 | $3,0329 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,15 | $2,4318 \cdot 10^{-13}$           | 0,49 | $1,0270 \cdot 10^{-12}$           | 0,83 | $3,7371 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,16 | $2,5105 \cdot 10^{-13}$           | 0,50 | $1,0889 \cdot 10^{-12}$           | 0,84 | $4,6808 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,17 | $2,5929 \cdot 10^{-13}$           | 0,51 | $1,1561 \cdot 10^{-12}$           | 0,85 | $5,9759 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,18 | $2,6793 \cdot 10^{-13}$           | 0,52 | $1,2293 \cdot 10^{-12}$           | 0,86 | $7,8032 \cdot 10^{-11}$           |
| 0,19 | $2,7698 \cdot 10^{-13}$           | 0,53 | $1,3091 \cdot 10^{-12}$           | 0,87 | $1,0468 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,20 | $2,8649 \cdot 10^{-13}$           | 0,54 | $1,3963 \cdot 10^{-12}$           | 0,88 | $1,4516 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,21 | $2,9647 \cdot 10^{-13}$           | 0,55 | $1,4917 \cdot 10^{-12}$           | 0,89 | $2,0976 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,22 | $3,0696 \cdot 10^{-13}$           | 0,56 | $1,5965 \cdot 10^{-12}$           | 0,90 | $3,1964 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,23 | $3,1800 \cdot 10^{-13}$           | 0,57 | $1,7118 \cdot 10^{-12}$           | 0,91 | $5,2288 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,24 | $3,2961 \cdot 10^{-13}$           | 0,58 | $1,8389 \cdot 10^{-12}$           | 0,92 | $9,4473 \cdot 10^{-10}$           |
| 0,25 | $3,4183 \cdot 10^{-13}$           | 0,59 | $1,9795 \cdot 10^{-12}$           | 0,93 | $1,9815 \cdot 10^{-09}$           |
| 0,26 | $3,5472 \cdot 10^{-13}$           | 0,60 | $2,1354 \cdot 10^{-12}$           | 0,94 | $5,3224 \cdot 10^{-09}$           |
| 0,27 | $3,6831 \cdot 10^{-13}$           | 0,61 | $2,3087 \cdot 10^{-12}$           | 0,95 | $2,3093 \cdot 10^{-08}$           |
| 0,28 | $3,8266 \cdot 10^{-13}$           | 0,62 | $2,5021 \cdot 10^{-12}$           | 0,96 | $3,4592 \cdot 10^{-07}$           |
| 0,29 | $3,9783 \cdot 10^{-13}$           | 0,63 | $2,7186 \cdot 10^{-12}$           | 0,97 | $1,2875 \cdot 10^{-01}$           |
| 0,30 | $4,1386 \cdot 10^{-13}$           | 0,64 | $2,9617 \cdot 10^{-12}$           | 0,98 | $\infty$                          |
| 0,31 | $4,3083 \cdot 10^{-13}$           | 0,65 | $3,2358 \cdot 10^{-12}$           | 0,99 | $\infty$                          |
| 0,32 | $4,4881 \cdot 10^{-13}$           | 0,66 | $3,5459 \cdot 10^{-12}$           | 1,00 | $\infty$                          |
| 0,33 | $4,6788 \cdot 10^{-13}$           | 0,67 | $3,8984 \cdot 10^{-12}$           |      |                                   |

Selbst für die weniger divergente Wahl  $\alpha_s(M_{B_c}^2)$  ergibt sich das Problem, dass die differentielle Rate für maximales  $Q_{max}^2 = M^2(1 - r_J)^2$  in dritter Potenz divergent ist. Integriert man (3.155) nicht bis  $Q_{max}^2 = M^2(1 - r_J)^2$ ,



sondern bis  $Q_{max}^2 = M^2 (1 - \lambda) (1 - r_J)^2$  mit  $0 < \lambda < 1$ , erhält man eine in  $\lambda$  divergente Funktion, deren divergentester Anteil

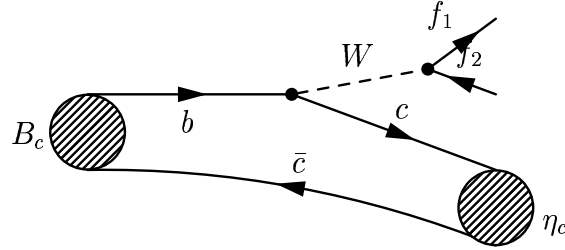
$$\frac{1024 G_F^2 V_{cb}^2 \alpha_s^2 \phi^2 \phi_J^2}{81 M \pi^3 (1 - r_J)^3 r_J^{3/2} \lambda^{3/2}} \quad (3.180)$$

ist.

Physikalisch geschieht für  $Q^2 = Q_{max}^2 = M^2 (1 - r_J)^2$  folgendes: An dieser Stelle erhält das Charmonium keinen Rückstoß. (Zusätzlich ist dieser Punkt im Phasenraum dadurch gekennzeichnet, dass das Gluon überhaupt keinen Impuls überträgt.) Nun hat man aber die Näherung im Relativimpuls unter der Voraussetzung durchgeführt, dass dieser klein ist gegen alle anderen auftauchenden Impulse. Wenn die anderen Impulse aber alle verschwinden, ist die Voraussetzung zur Näherung nicht mehr gegeben und man muss die Rechnung für diesen Bereich verschwindenden Rückstoßes, in dem das Gluon wegen seiner Weichheit bereits im starken Potential berücksichtigt ist, getrennt durchführen.

Dies geschieht im Folgenden:

#### Der weiche Anteil des Zerfalls $B_c \rightarrow \text{Charmonium } l \nu_l$



Auch hier schreibt man die Amplitude in Form einer Spur, in der die Spinor-Matrizen die Projektoren auf die Drehimpulszustände bilden:

$$\mathcal{A} = -2\sqrt{2}iG_F V_{cb} \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_c^0 + m_c}} \frac{1}{\sqrt{p_3^0 + m_c}} \frac{1}{\sqrt{p_4^0 + m_c}} \frac{1}{MM_J} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} (m_b + \not{p}_b) (M + \not{P}) \gamma_5 (m_c - \not{p}_c) (m_c - \not{p}_4) \gamma_5 (M_J + \not{P}_J) (m_c + \not{p}_3) \right] \quad (3.181)$$

was sich wegen  $p_4 = p_c$  vereinfachen lässt zu

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -2\sqrt{2}iG_F V_{cb} \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_3^0 + m_c}} \frac{1}{(p_c^0 + m_c)} \\ & \frac{2m_c}{MM_J} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} (m_b + \not{p}_b)(M + \not{P})(m_c + \not{p}_c) \right. \\ & \left. (M_J + \not{P}_J)(m_c + \not{p}_3) \right]. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Äquivalent zur Vorgehensweise beim Strahlungsübergang ergibt sich die Rate

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 P_J}{(2\pi)^3 2P_J^0} \int \frac{d^3 p_1^0}{(2\pi)^3 2p_1^0} \int \frac{d^3 p_2^0}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - P_J - Q) \\ & \left| \frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{2m_b}\sqrt{2m_c}} \frac{\sqrt{2M_J}}{\sqrt{2m_c}\sqrt{2m_c}} \right. \\ & \left. \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}(\vec{p}) \Psi_J^* \left( \vec{p} + \frac{m_b - m_c}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q} \right) \mathcal{A} \bar{u}_1 \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} v_2 \right|^2 \end{aligned} \quad (3.183)$$

Im Weiteren ist

$$m_c = \frac{M_J}{2} \quad (3.184)$$

$$m_b = M - \frac{M_J}{2} \quad (3.185)$$

Nimmt man die Spur in Gl. (3.182), ersetzt die Impulse der Quarks durch Schwerpunkt- und Relativimpulse und berücksichtigt das Integral über den Relativimpuls erhält man folgende Struktur:

$$\begin{aligned} A & := \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}(\vec{p}) \Psi_J^* \left( \vec{p} + \frac{m_b - m_c}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q} \right) \mathcal{A} \\ & = \int d^3 p f_1(p) P_J^\mu + \int d^3 p f_2(p) Q^\mu \end{aligned} \quad (3.186)$$

$$+ \int d^3 p f_3(p) p^\mu + \int d^3 p f_4(p) e^{P_J Q p^\mu} \quad (3.187)$$

$$=: F_1 P_J^\mu + F_2 Q^\mu + \int d^3 p f_3(p) p^\mu + \int d^3 p f_4(p) e^{P_J Q p^\mu} \quad (3.188)$$

$$= G_1 P_J^\mu + G_2 Q^\mu \quad (3.189)$$

Das letzte „=“ fordert die Lorentzinvarianz.  
Damit wird die Rate in Gl. (3.183) zu

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 P_J}{(2\pi)^3 2P_J^0} \int \frac{d^3 p_1^0}{(2\pi)^3 2p_1^0} \int \frac{d^3 p_2^0}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - P_J - Q) \frac{2M}{(2M - M_J)M_J} \frac{2}{M_J} A_\mu^* A_\nu \bar{u}_1 \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} v_2 \bar{v}_2 \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} u_1 \quad (3.190)$$

Multipliziere nun Gl. (3.189) einmal mit  $P_{J\mu}$  und einmal mit  $Q_\mu$ .  
Dies ergibt zwei Gleichungen:

$$F_1 M_J^2 + F_2 Q \cdot P_J + F_A + 0 = G_1 M_J^2 + G_2 Q \cdot P_J \quad (3.191)$$

$$F_1 Q \cdot P_J + F_2 Q^2 + F_B + 0 = G_1 Q \cdot P_J + G_2 Q^2 \quad (3.192)$$

wobei

$$F_A = \int d^3 p f_3(p) p \cdot P_J \quad (3.193)$$

$$F_B = \int d^3 p f_3(p) p \cdot Q \quad (3.194)$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt für den Formfaktor  $G_1$ :

$$G_1 = \frac{F_A - \frac{Q \cdot P_J}{Q^2} F_B}{M_J^2 - \frac{(Q \cdot P_J)^2}{Q^2}} + F_1. \quad (3.195)$$

( $G_2$  wird nicht benötigt so lange die beiden freien Fermionen masselos sind, denn  $Q = p_1 + p_2$  und  $\bar{u}_1(p_1)(\not{p}_1 + \not{p}_2)v_2(p_2) = \bar{u}_1(p_1)(m_1 - m_2)v_2(p_2) = 0$ .) Interessanterweise verschwindet der in  $G_1$  auftretende Nenner für maximales  $Q^2$  (vergl. Gl. (3.210)). Wie sich aber zeigen wird, gleichen andere Faktoren diese Divergenz mehr als aus.

Fasst man nach diesen Schritten nun alles zusammen, treten in  $G_1$  sieben

Integrale auf:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) \quad (3.196)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) (Q \cdot p) \quad (3.197)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) (Q \cdot p)^2 \quad (3.198)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) (P_J \cdot p) \quad (3.199)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) (P_J \cdot p)^2 \quad (3.200)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) (Q \cdot p) (P_J \cdot p) \quad (3.201)$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{\eta_c}(\vec{p} + \frac{M - M_J}{2M} \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{Q}) S_N(p) p^2 \quad (3.202)$$

wobei

$$S_N(p) = \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_3^0 + m_c}} \frac{1}{(p_c^0 + m_c)} \quad (3.203)$$

die Spinornormen aus Gl. (3.182) sind.

An dieser Stelle sind in Wirklichkeit mehr als sieben Integrale zu lösen, da die 0-Komponente des Relativimpulses  $p$  eine Funktion des räumlichen Relativimpulses ist.

Allerdings kann man mit den folgenden Umformungen und daran anschließenden Näherungen die Zahl der tatsächlich auftretenden Integrale noch reduzieren:

Ab hier gelten alle Gleichungen im Ruhesystem des  $B_c$  ( $P = (M, \vec{0})$ ,  $\vec{P}_J = -\vec{Q}$  und  $M = P_J^0 + Q^0$ ):

Wegen

$$M_J^2 = P_J^2 = (P - Q)^2 = M^2 - 2MQ^0 + Q^2 \quad (3.204)$$

ist

$$Q^0 = \frac{1}{2M} (M^2 + Q^2 - M_J^2) \quad (3.205)$$

und damit

$$|\vec{Q}|^2 = (Q^0)^2 - Q^2 = \frac{(M^2 + Q^2 - M_J^2)^2}{4M^2} - Q^2 \quad (3.206)$$

Somit kann man auch schreiben:

$$P_J \cdot p = P_J^0 p^0 - \vec{P}_J \vec{p} = (M - Q^0) p^0 + \vec{Q} \cdot \vec{p} \quad (3.207)$$

$$\begin{aligned} &= \left( M - \frac{1}{2M} (M^2 + Q^2 - M_J^2) \right) p^0 \\ &\quad + \sqrt{\frac{(M^2 + Q^2 - M_J^2)^2}{4M^2} - Q^2} |\vec{p}| \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (3.208)$$

$$\text{mit } \cos(\vartheta) = \frac{\vec{Q} \cdot \vec{p}}{|\vec{Q}| |\vec{p}|} \quad (3.209)$$

Ersetzt man noch

$$Q \cdot P_J = \frac{1}{2} (M^2 - M_J^2 - Q^2), \quad (3.210)$$

ist alles nur noch von  $Q^2$ ,  $|\vec{p}|$ ,  $p^0$  und  $\cos(\vartheta)$  abhängig.

Es soll nun nicht-relativistisch genähert und nur Terme bis  $O(|\vec{p}|^2)$  berücksichtigt werden.

Dann wird aus  $p^0$ :

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{m_c p_b^0 - m_b p_c^0}{M} \\ &= \frac{m_c \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_b^2} - m_b \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_c^2}}{M} \\ &\approx \frac{m_b m_c}{M} \left( \left( 1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m_b^2} \right) - \left( 1 + \frac{|\vec{p}|^2}{2m_c^2} \right) \right) \\ &\approx \frac{m_c^2 - m_b^2}{2M m_b m_c} |\vec{p}|^2 \\ &\approx -\frac{m_b - m_c}{2m_b m_c} |\vec{p}|^2 \\ &\approx -\frac{M - M_J}{\left( M - \frac{M_J}{2} \right) M_J} |\vec{p}|^2 \end{aligned} \quad (3.211)$$

Und damit aus  $S_N$ :

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_3^0 + m_c}} \frac{1}{(p_c^0 + m_c)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{p_b^0 + m_b}} \frac{1}{\sqrt{p_b^0 - Q^0 + m_c}} \frac{1}{(p_c^0 + m_c)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{p^0 + 2m_b}} \frac{1}{\sqrt{p^0 - Q^0 + m_c + m_b}} \frac{1}{(2m_c - p^0)} \\
&\cong \frac{1}{M_J \sqrt{2M - M_J} \sqrt{M - Q^0}} \\
&= \frac{(M - M_J) (4M^2 - 5M M_J + M_J^2 - 4M Q^0 + 3M_J Q^0)}{(2M - M_J)^{\frac{5}{2}} M_J^3 (M - Q^0)^{\frac{3}{2}}} |\vec{p}|^2 \quad (3.212)
\end{aligned}$$

Und so bleiben als tatsächlich zu lösende Integrale

$$I_1(Q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{n_c}(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{Q}) \quad (3.213)$$

$$I_2(Q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{n_c}(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{Q}) |\vec{p}| \cos \vartheta \quad (3.214)$$

$$I_3(Q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{n_c}(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{Q}) |\vec{p}|^2 \quad (3.215)$$

$$I_4(Q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Psi_{B_c}^*(\vec{p}) \Psi_{n_c}(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{Q}) |\vec{p}|^2 \cos^2(\vartheta) \quad (3.216)$$

$$(3.217)$$

wobei  $\vartheta$  als Winkel der Integration gewählt wird.

Man erhält für den Formfaktor  $G_1(Q^2)$ :

$$G_1(Q^2) = g_1(Q^2)I_1(Q^2) + g_2(Q^2)I_2(Q^2) + g_3(Q^2)I_3(Q^2) + g_4(Q^2)I_4(Q^2) \quad (3.218)$$

wobei (mit  $r_J = M_J/M$ )

$$g_1(Q^2) = -4 G_F M V_{cb} r_J \frac{\sqrt{2 - r_J} \left( 3 + 2r_J - r_J^2 + \frac{Q^2}{M^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2}} \quad (3.219)$$

$$g_2(Q^2) = \frac{8 G_F V_{cb}}{\sqrt{(2-r_J) \left(1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2\right)} \sqrt{\left(\frac{Q^2}{M^2}\right)^2 + (1-r_J^2)^2 - 2 \frac{Q^2}{M^2} (1+r_J^2)}} \left( 3 - 2r_J + 2r_J^2 - 5r_J^4 + 2r_J^5 - 4 \frac{Q^2}{M^2} (1-r_J)^2 r_J + \left(\frac{Q^2}{M^2}\right)^2 (-3 + 2r_J) \right) \quad (3.220)$$

$$g_3(Q^2) = \frac{4 G_F V_{cb}}{M r_J \left( (2-r_J) \left(1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2\right) \right)^{\frac{3}{2}}} \left( 8 - 27r_J + 32r_J^2 - 22r_J^3 + 10r_J^4 - 15r_J^5 + 6r_J^6 - 2 \frac{Q^2}{M^2} (8 - 13r_J + 11r_J^2 - 15r_J^3 + 6r_J^4) + \left(\frac{Q^2}{M^2}\right)^2 (8 - 15r_J + 6r_J^2) \right) \quad (3.221)$$

$$g_4(Q^2) = -\frac{16 G_F V_{cb} (1-r_J) \left(1 + \frac{Q^2}{M^2} - r_J^2\right)}{M r_J \sqrt{(2-r_J) \left(1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2\right)}} \quad (3.222)$$

Mit den Umformungen des Phasenraumelementes wie in Anhang A und  $2(P \cdot P_J)M^2 x_J = M^2 + M_J^2 - Q^2$  wird die Rate aus Gl. (3.190) schließlich zu

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \frac{M^2}{16(2\pi)^3} \frac{4}{M^2 r_J^2 (2-r_J)} \int_0^{(1-r_J)^2} \frac{dQ^2}{M^2} |G_1(Q^2)|^2 \int_{x_1^-}^{x_1^+} dx_1 \text{Tr} \left[ \not{p}_1 \not{P}_J \not{p}_2 \not{P}_J \frac{1-\gamma_5}{2} \right] \quad (3.223)$$

mit

$$x_1 = 2 \frac{P \cdot p_1}{M^2}. \quad (3.224)$$

Das innere Integral

$$\int_{x_1^-}^{x_1^+} dx_1 \text{Tr} \left[ \not{p}_1 \not{P}_J \not{p}_2 \not{P}_J \frac{1-\gamma_5}{2} \right] \quad (3.225)$$

$$= M^4 \int_{x_1^-}^{x_1^+} dx_1 \left( -\frac{Q^2}{M^2} - x_1 \left( 1 + \frac{Q^2}{M^2} - r_J^2 \right) - x_1^2 \right) \quad (3.226)$$

mit den Grenzen

$$x_1^\pm = \frac{1}{2} \left( 1 - r_J^2 + \frac{Q^2}{M^2} \pm \sqrt{\left( 1 + r_J^2 - \frac{Q^2}{M^2} \right)^2 - 4r_J^2} \right), \quad (3.227)$$

das nur den Zerfall des  $W$ -Bosons betrifft, ergibt

$$M^4 W(Q^2) := \frac{M^4}{6} \left( (1 - r_J^2)^2 - 2 \frac{Q^2}{M^2} (1 + r_J^2) + \left( \frac{Q^2}{M^2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.228)$$

Damit besteht die Rate aus Gl. (3.223) nur noch aus einem Integral über die invariante Masse des  $W$ -Bosons und den vier Integralen über den Relativimpuls:

$$\Gamma = \frac{M}{48(2\pi)^3 r_J^2 (2 - r_J)} \int_0^{(1-r_J)^2} \frac{dQ^2}{M^2} |M G_1(Q^2)|^2 \left( \frac{(Q^2)^2}{M^4} + (1 - r_J^2)^2 - 2 \frac{Q^2}{M^2} (1 + r_J^2) \right) \sqrt{\left( 1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2 \right)^2 - 4r_J^2} \quad (3.229)$$

D.h.

$$M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2} = \frac{M}{48(2\pi)^3 r_J^2 (2 - r_J)} |M G_1(Q^2)|^2 \sqrt{\left( 1 - \frac{Q^2}{M^2} + r_J^2 \right)^2 - 4r_J^2} \left( \frac{(Q^2)^2}{M^4} + (1 - r_J^2)^2 - 2 \frac{Q^2}{M^2} (1 + r_J^2) \right) \quad (3.230)$$

$$= \frac{M}{8(2\pi)^3 r_J^2 (2 - r_J)} |M G_1(Q^2)|^2 W(Q^2) \quad (3.231)$$

Sei nun wieder

$$G_F = 1,16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (3.232)$$

$$V_{cb} = 0,04 \quad (3.233)$$

$$M = 6,4 \text{ GeV} \quad (3.234)$$

$$M_{\eta_c} = 2,9792 \text{ GeV} \quad (3.235)$$

$$r_J = \frac{M_{\eta_c}}{M} = 0,4655 \quad (3.236)$$

$$\frac{Q^2}{M^2} = x(1 - r_J)^2 \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.237)$$



Damit ergeben sich folgende Werte:

| $x$  | $W$                   | $M g_1$                | $M^2 g_2$             | $M^3 g_3$              | $M^3 g_4$              |
|------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 0,00 | $8,010 \cdot 10^{-2}$ | $-1,484 \cdot 10^{-4}$ | $3,301 \cdot 10^{-4}$ | $2,248 \cdot 10^{-5}$  | $-2,013 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,01 | $7,875 \cdot 10^{-2}$ | $-1,487 \cdot 10^{-4}$ | $3,322 \cdot 10^{-4}$ | $2,141 \cdot 10^{-5}$  | $-2,022 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,02 | $7,740 \cdot 10^{-2}$ | $-1,490 \cdot 10^{-4}$ | $3,343 \cdot 10^{-4}$ | $2,034 \cdot 10^{-5}$  | $-2,032 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,03 | $7,607 \cdot 10^{-2}$ | $-1,493 \cdot 10^{-4}$ | $3,364 \cdot 10^{-4}$ | $1,927 \cdot 10^{-5}$  | $-2,042 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,04 | $7,474 \cdot 10^{-2}$ | $-1,496 \cdot 10^{-4}$ | $3,385 \cdot 10^{-4}$ | $1,819 \cdot 10^{-5}$  | $-2,052 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,05 | $7,343 \cdot 10^{-2}$ | $-1,499 \cdot 10^{-4}$ | $3,407 \cdot 10^{-4}$ | $1,711 \cdot 10^{-5}$  | $-2,062 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,06 | $7,213 \cdot 10^{-2}$ | $-1,502 \cdot 10^{-4}$ | $3,429 \cdot 10^{-4}$ | $1,602 \cdot 10^{-5}$  | $-2,071 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,07 | $7,084 \cdot 10^{-2}$ | $-1,505 \cdot 10^{-4}$ | $3,451 \cdot 10^{-4}$ | $1,492 \cdot 10^{-5}$  | $-2,081 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,08 | $6,956 \cdot 10^{-2}$ | $-1,508 \cdot 10^{-4}$ | $3,473 \cdot 10^{-4}$ | $1,382 \cdot 10^{-5}$  | $-2,091 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,09 | $6,829 \cdot 10^{-2}$ | $-1,511 \cdot 10^{-4}$ | $3,496 \cdot 10^{-4}$ | $1,271 \cdot 10^{-5}$  | $-2,101 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,10 | $6,703 \cdot 10^{-2}$ | $-1,514 \cdot 10^{-4}$ | $3,519 \cdot 10^{-4}$ | $1,160 \cdot 10^{-5}$  | $-2,111 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,11 | $6,579 \cdot 10^{-2}$ | $-1,517 \cdot 10^{-4}$ | $3,543 \cdot 10^{-4}$ | $1,048 \cdot 10^{-5}$  | $-2,121 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,12 | $6,455 \cdot 10^{-2}$ | $-1,520 \cdot 10^{-4}$ | $3,567 \cdot 10^{-4}$ | $9,360 \cdot 10^{-6}$  | $-2,131 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,13 | $6,332 \cdot 10^{-2}$ | $-1,523 \cdot 10^{-4}$ | $3,591 \cdot 10^{-4}$ | $8,232 \cdot 10^{-6}$  | $-2,141 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,14 | $6,211 \cdot 10^{-2}$ | $-1,526 \cdot 10^{-4}$ | $3,615 \cdot 10^{-4}$ | $7,097 \cdot 10^{-6}$  | $-2,151 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,15 | $6,090 \cdot 10^{-2}$ | $-1,529 \cdot 10^{-4}$ | $3,640 \cdot 10^{-4}$ | $5,957 \cdot 10^{-6}$  | $-2,161 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,16 | $5,971 \cdot 10^{-2}$ | $-1,532 \cdot 10^{-4}$ | $3,666 \cdot 10^{-4}$ | $4,811 \cdot 10^{-6}$  | $-2,171 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,17 | $5,853 \cdot 10^{-2}$ | $-1,535 \cdot 10^{-4}$ | $3,691 \cdot 10^{-4}$ | $3,659 \cdot 10^{-6}$  | $-2,181 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,18 | $5,736 \cdot 10^{-2}$ | $-1,538 \cdot 10^{-4}$ | $3,717 \cdot 10^{-4}$ | $2,501 \cdot 10^{-6}$  | $-2,192 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,19 | $5,620 \cdot 10^{-2}$ | $-1,541 \cdot 10^{-4}$ | $3,744 \cdot 10^{-4}$ | $1,337 \cdot 10^{-6}$  | $-2,202 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,20 | $5,505 \cdot 10^{-2}$ | $-1,544 \cdot 10^{-4}$ | $3,771 \cdot 10^{-4}$ | $1,673 \cdot 10^{-7}$  | $-2,212 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,21 | $5,391 \cdot 10^{-2}$ | $-1,547 \cdot 10^{-4}$ | $3,798 \cdot 10^{-4}$ | $-1,009 \cdot 10^{-6}$ | $-2,222 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,22 | $5,278 \cdot 10^{-2}$ | $-1,550 \cdot 10^{-4}$ | $3,826 \cdot 10^{-4}$ | $-2,191 \cdot 10^{-6}$ | $-2,233 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,23 | $5,166 \cdot 10^{-2}$ | $-1,553 \cdot 10^{-4}$ | $3,854 \cdot 10^{-4}$ | $-3,379 \cdot 10^{-6}$ | $-2,243 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,24 | $5,055 \cdot 10^{-2}$ | $-1,556 \cdot 10^{-4}$ | $3,883 \cdot 10^{-4}$ | $-4,573 \cdot 10^{-6}$ | $-2,253 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,25 | $4,945 \cdot 10^{-2}$ | $-1,559 \cdot 10^{-4}$ | $3,912 \cdot 10^{-4}$ | $-5,774 \cdot 10^{-6}$ | $-2,264 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,26 | $4,837 \cdot 10^{-2}$ | $-1,562 \cdot 10^{-4}$ | $3,942 \cdot 10^{-4}$ | $-6,980 \cdot 10^{-6}$ | $-2,274 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,27 | $4,729 \cdot 10^{-2}$ | $-1,566 \cdot 10^{-4}$ | $3,973 \cdot 10^{-4}$ | $-8,194 \cdot 10^{-6}$ | $-2,284 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,28 | $4,623 \cdot 10^{-2}$ | $-1,569 \cdot 10^{-4}$ | $4,003 \cdot 10^{-4}$ | $-9,413 \cdot 10^{-6}$ | $-2,295 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,29 | $4,518 \cdot 10^{-2}$ | $-1,572 \cdot 10^{-4}$ | $4,035 \cdot 10^{-4}$ | $-1,064 \cdot 10^{-5}$ | $-2,305 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,30 | $4,413 \cdot 10^{-2}$ | $-1,575 \cdot 10^{-4}$ | $4,067 \cdot 10^{-4}$ | $-1,187 \cdot 10^{-5}$ | $-2,316 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,31 | $4,310 \cdot 10^{-2}$ | $-1,578 \cdot 10^{-4}$ | $4,100 \cdot 10^{-4}$ | $-1,311 \cdot 10^{-5}$ | $-2,326 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,32 | $4,208 \cdot 10^{-2}$ | $-1,581 \cdot 10^{-4}$ | $4,133 \cdot 10^{-4}$ | $-1,436 \cdot 10^{-5}$ | $-2,337 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,33 | $4,107 \cdot 10^{-2}$ | $-1,585 \cdot 10^{-4}$ | $4,167 \cdot 10^{-4}$ | $-1,561 \cdot 10^{-5}$ | $-2,348 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,34 | $4,007 \cdot 10^{-2}$ | $-1,588 \cdot 10^{-4}$ | $4,202 \cdot 10^{-4}$ | $-1,687 \cdot 10^{-5}$ | $-2,358 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,35 | $3,908 \cdot 10^{-2}$ | $-1,591 \cdot 10^{-4}$ | $4,238 \cdot 10^{-4}$ | $-1,814 \cdot 10^{-5}$ | $-2,369 \cdot 10^{-4}$ |

Fortsetzung:

| $x$  | $W$                   | $M g_1$                | $M^2 g_2$             | $M^3 g_3$              | $M^3 g_4$              |
|------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 0,36 | $3,810 \cdot 10^{-2}$ | $-1,594 \cdot 10^{-4}$ | $4,274 \cdot 10^{-4}$ | $-1,941 \cdot 10^{-5}$ | $-2,380 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,37 | $3,713 \cdot 10^{-2}$ | $-1,597 \cdot 10^{-4}$ | $4,311 \cdot 10^{-4}$ | $-2,069 \cdot 10^{-5}$ | $-2,390 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,38 | $3,618 \cdot 10^{-2}$ | $-1,601 \cdot 10^{-4}$ | $4,349 \cdot 10^{-4}$ | $-2,198 \cdot 10^{-5}$ | $-2,401 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,39 | $3,523 \cdot 10^{-2}$ | $-1,604 \cdot 10^{-4}$ | $4,387 \cdot 10^{-4}$ | $-2,327 \cdot 10^{-5}$ | $-2,412 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,40 | $3,430 \cdot 10^{-2}$ | $-1,607 \cdot 10^{-4}$ | $4,427 \cdot 10^{-4}$ | $-2,457 \cdot 10^{-5}$ | $-2,423 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,41 | $3,337 \cdot 10^{-2}$ | $-1,611 \cdot 10^{-4}$ | $4,467 \cdot 10^{-4}$ | $-2,588 \cdot 10^{-5}$ | $-2,434 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,42 | $3,246 \cdot 10^{-2}$ | $-1,614 \cdot 10^{-4}$ | $4,509 \cdot 10^{-4}$ | $-2,720 \cdot 10^{-5}$ | $-2,445 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,43 | $3,156 \cdot 10^{-2}$ | $-1,617 \cdot 10^{-4}$ | $4,551 \cdot 10^{-4}$ | $-2,852 \cdot 10^{-5}$ | $-2,456 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,44 | $3,066 \cdot 10^{-2}$ | $-1,621 \cdot 10^{-4}$ | $4,595 \cdot 10^{-4}$ | $-2,985 \cdot 10^{-5}$ | $-2,467 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,45 | $2,978 \cdot 10^{-2}$ | $-1,624 \cdot 10^{-4}$ | $4,639 \cdot 10^{-4}$ | $-3,119 \cdot 10^{-5}$ | $-2,478 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,46 | $2,891 \cdot 10^{-2}$ | $-1,627 \cdot 10^{-4}$ | $4,685 \cdot 10^{-4}$ | $-3,253 \cdot 10^{-5}$ | $-2,489 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,47 | $2,805 \cdot 10^{-2}$ | $-1,631 \cdot 10^{-4}$ | $4,732 \cdot 10^{-4}$ | $-3,389 \cdot 10^{-5}$ | $-2,500 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,48 | $2,721 \cdot 10^{-2}$ | $-1,634 \cdot 10^{-4}$ | $4,780 \cdot 10^{-4}$ | $-3,525 \cdot 10^{-5}$ | $-2,511 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,49 | $2,637 \cdot 10^{-2}$ | $-1,637 \cdot 10^{-4}$ | $4,830 \cdot 10^{-4}$ | $-3,661 \cdot 10^{-5}$ | $-2,522 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,50 | $2,554 \cdot 10^{-2}$ | $-1,641 \cdot 10^{-4}$ | $4,881 \cdot 10^{-4}$ | $-3,799 \cdot 10^{-5}$ | $-2,533 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,51 | $2,473 \cdot 10^{-2}$ | $-1,644 \cdot 10^{-4}$ | $4,933 \cdot 10^{-4}$ | $-3,938 \cdot 10^{-5}$ | $-2,544 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,52 | $2,392 \cdot 10^{-2}$ | $-1,647 \cdot 10^{-4}$ | $4,987 \cdot 10^{-4}$ | $-4,077 \cdot 10^{-5}$ | $-2,555 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,53 | $2,313 \cdot 10^{-2}$ | $-1,651 \cdot 10^{-4}$ | $5,043 \cdot 10^{-4}$ | $-4,217 \cdot 10^{-5}$ | $-2,567 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,54 | $2,235 \cdot 10^{-2}$ | $-1,654 \cdot 10^{-4}$ | $5,100 \cdot 10^{-4}$ | $-4,358 \cdot 10^{-5}$ | $-2,578 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,55 | $2,158 \cdot 10^{-2}$ | $-1,658 \cdot 10^{-4}$ | $5,159 \cdot 10^{-4}$ | $-4,499 \cdot 10^{-5}$ | $-2,589 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,56 | $2,082 \cdot 10^{-2}$ | $-1,661 \cdot 10^{-4}$ | $5,220 \cdot 10^{-4}$ | $-4,642 \cdot 10^{-5}$ | $-2,601 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,57 | $2,007 \cdot 10^{-2}$ | $-1,665 \cdot 10^{-4}$ | $5,283 \cdot 10^{-4}$ | $-4,785 \cdot 10^{-5}$ | $-2,612 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,58 | $1,933 \cdot 10^{-2}$ | $-1,668 \cdot 10^{-4}$ | $5,348 \cdot 10^{-4}$ | $-4,929 \cdot 10^{-5}$ | $-2,624 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,59 | $1,860 \cdot 10^{-2}$ | $-1,672 \cdot 10^{-4}$ | $5,415 \cdot 10^{-4}$ | $-5,074 \cdot 10^{-5}$ | $-2,635 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,60 | $1,789 \cdot 10^{-2}$ | $-1,675 \cdot 10^{-4}$ | $5,485 \cdot 10^{-4}$ | $-5,220 \cdot 10^{-5}$ | $-2,647 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,61 | $1,718 \cdot 10^{-2}$ | $-1,679 \cdot 10^{-4}$ | $5,557 \cdot 10^{-4}$ | $-5,367 \cdot 10^{-5}$ | $-2,658 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,62 | $1,649 \cdot 10^{-2}$ | $-1,682 \cdot 10^{-4}$ | $5,632 \cdot 10^{-4}$ | $-5,514 \cdot 10^{-5}$ | $-2,670 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,63 | $1,581 \cdot 10^{-2}$ | $-1,686 \cdot 10^{-4}$ | $5,710 \cdot 10^{-4}$ | $-5,663 \cdot 10^{-5}$ | $-2,681 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,64 | $1,514 \cdot 10^{-2}$ | $-1,689 \cdot 10^{-4}$ | $5,791 \cdot 10^{-4}$ | $-5,812 \cdot 10^{-5}$ | $-2,693 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,65 | $1,448 \cdot 10^{-2}$ | $-1,693 \cdot 10^{-4}$ | $5,876 \cdot 10^{-4}$ | $-5,962 \cdot 10^{-5}$ | $-2,705 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,66 | $1,384 \cdot 10^{-2}$ | $-1,697 \cdot 10^{-4}$ | $5,964 \cdot 10^{-4}$ | $-6,113 \cdot 10^{-5}$ | $-2,716 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,67 | $1,320 \cdot 10^{-2}$ | $-1,700 \cdot 10^{-4}$ | $6,056 \cdot 10^{-4}$ | $-6,265 \cdot 10^{-5}$ | $-2,728 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,68 | $1,258 \cdot 10^{-2}$ | $-1,704 \cdot 10^{-4}$ | $6,152 \cdot 10^{-4}$ | $-6,418 \cdot 10^{-5}$ | $-2,740 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,69 | $1,197 \cdot 10^{-2}$ | $-1,707 \cdot 10^{-4}$ | $6,252 \cdot 10^{-4}$ | $-6,572 \cdot 10^{-5}$ | $-2,752 \cdot 10^{-4}$ |

Fortsetzung:

| $x$  | $W$                   | $M g_1$                | $M^2 g_2$             | $M^3 g_3$              | $M^3 g_4$              |
|------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 0,70 | $1,137 \cdot 10^{-2}$ | $-1,711 \cdot 10^{-4}$ | $6,358 \cdot 10^{-4}$ | $-6,727 \cdot 10^{-5}$ | $-2,764 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,71 | $1,078 \cdot 10^{-2}$ | $-1,715 \cdot 10^{-4}$ | $6,468 \cdot 10^{-4}$ | $-6,883 \cdot 10^{-5}$ | $-2,776 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,72 | $1,020 \cdot 10^{-2}$ | $-1,718 \cdot 10^{-4}$ | $6,585 \cdot 10^{-4}$ | $-7,040 \cdot 10^{-5}$ | $-2,788 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,73 | $9,642 \cdot 10^{-3}$ | $-1,722 \cdot 10^{-4}$ | $6,707 \cdot 10^{-4}$ | $-7,198 \cdot 10^{-5}$ | $-2,800 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,74 | $9,091 \cdot 10^{-3}$ | $-1,726 \cdot 10^{-4}$ | $6,837 \cdot 10^{-4}$ | $-7,356 \cdot 10^{-5}$ | $-2,812 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,75 | $8,552 \cdot 10^{-3}$ | $-1,730 \cdot 10^{-4}$ | $6,974 \cdot 10^{-4}$ | $-7,516 \cdot 10^{-5}$ | $-2,824 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,76 | $8,027 \cdot 10^{-3}$ | $-1,733 \cdot 10^{-4}$ | $7,119 \cdot 10^{-4}$ | $-7,677 \cdot 10^{-5}$ | $-2,836 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,77 | $7,514 \cdot 10^{-3}$ | $-1,737 \cdot 10^{-4}$ | $7,274 \cdot 10^{-4}$ | $-7,838 \cdot 10^{-5}$ | $-2,848 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,78 | $7,013 \cdot 10^{-3}$ | $-1,741 \cdot 10^{-4}$ | $7,439 \cdot 10^{-4}$ | $-8,001 \cdot 10^{-5}$ | $-2,860 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,79 | $6,526 \cdot 10^{-3}$ | $-1,745 \cdot 10^{-4}$ | $7,615 \cdot 10^{-4}$ | $-8,165 \cdot 10^{-5}$ | $-2,873 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,80 | $6,052 \cdot 10^{-3}$ | $-1,748 \cdot 10^{-4}$ | $7,805 \cdot 10^{-4}$ | $-8,330 \cdot 10^{-5}$ | $-2,885 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,81 | $5,591 \cdot 10^{-3}$ | $-1,752 \cdot 10^{-4}$ | $8,009 \cdot 10^{-4}$ | $-8,496 \cdot 10^{-5}$ | $-2,897 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,82 | $5,144 \cdot 10^{-3}$ | $-1,756 \cdot 10^{-4}$ | $8,229 \cdot 10^{-4}$ | $-8,663 \cdot 10^{-5}$ | $-2,910 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,83 | $4,711 \cdot 10^{-3}$ | $-1,760 \cdot 10^{-4}$ | $8,469 \cdot 10^{-4}$ | $-8,830 \cdot 10^{-5}$ | $-2,922 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,84 | $4,292 \cdot 10^{-3}$ | $-1,764 \cdot 10^{-4}$ | $8,731 \cdot 10^{-4}$ | $-9,000 \cdot 10^{-5}$ | $-2,935 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,85 | $3,887 \cdot 10^{-3}$ | $-1,768 \cdot 10^{-4}$ | $9,018 \cdot 10^{-4}$ | $-9,170 \cdot 10^{-5}$ | $-2,947 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,86 | $3,497 \cdot 10^{-3}$ | $-1,771 \cdot 10^{-4}$ | $9,335 \cdot 10^{-4}$ | $-9,341 \cdot 10^{-5}$ | $-2,960 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,87 | $3,122 \cdot 10^{-3}$ | $-1,775 \cdot 10^{-4}$ | $9,688 \cdot 10^{-4}$ | $-9,513 \cdot 10^{-5}$ | $-2,972 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,88 | $2,763 \cdot 10^{-3}$ | $-1,779 \cdot 10^{-4}$ | $1,008 \cdot 10^{-3}$ | $-9,687 \cdot 10^{-5}$ | $-2,985 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,89 | $2,419 \cdot 10^{-3}$ | $-1,783 \cdot 10^{-4}$ | $1,053 \cdot 10^{-3}$ | $-9,861 \cdot 10^{-5}$ | $-2,998 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,90 | $2,092 \cdot 10^{-3}$ | $-1,787 \cdot 10^{-4}$ | $1,105 \cdot 10^{-3}$ | $-1,004 \cdot 10^{-4}$ | $-3,010 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,91 | $1,782 \cdot 10^{-3}$ | $-1,791 \cdot 10^{-4}$ | $1,164 \cdot 10^{-3}$ | $-1,021 \cdot 10^{-4}$ | $-3,023 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,92 | $1,490 \cdot 10^{-3}$ | $-1,795 \cdot 10^{-4}$ | $1,235 \cdot 10^{-3}$ | $-1,039 \cdot 10^{-4}$ | $-3,036 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,93 | $1,217 \cdot 10^{-3}$ | $-1,799 \cdot 10^{-4}$ | $1,320 \cdot 10^{-3}$ | $-1,057 \cdot 10^{-4}$ | $-3,049 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,94 | $9,635 \cdot 10^{-4}$ | $-1,803 \cdot 10^{-4}$ | $1,426 \cdot 10^{-3}$ | $-1,075 \cdot 10^{-4}$ | $-3,062 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,95 | $7,313 \cdot 10^{-4}$ | $-1,807 \cdot 10^{-4}$ | $1,562 \cdot 10^{-3}$ | $-1,093 \cdot 10^{-4}$ | $-3,075 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,96 | $5,221 \cdot 10^{-4}$ | $-1,811 \cdot 10^{-4}$ | $1,746 \cdot 10^{-3}$ | $-1,112 \cdot 10^{-4}$ | $-3,088 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,97 | $3,383 \cdot 10^{-4}$ | $-1,815 \cdot 10^{-4}$ | $2,016 \cdot 10^{-3}$ | $-1,130 \cdot 10^{-4}$ | $-3,101 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,98 | $1,837 \cdot 10^{-4}$ | $-1,819 \cdot 10^{-4}$ | $2,469 \cdot 10^{-3}$ | $-1,149 \cdot 10^{-4}$ | $-3,114 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,99 | $6,481 \cdot 10^{-5}$ | $-1,823 \cdot 10^{-4}$ | $3,491 \cdot 10^{-3}$ | $-1,167 \cdot 10^{-4}$ | $-3,127 \cdot 10^{-4}$ |
| 1,00 | 0                     | $-1,827 \cdot 10^{-4}$ | $\infty$              | $-1,186 \cdot 10^{-4}$ | $-3,140 \cdot 10^{-4}$ |

$g_2(Q^2)$  divergiert zwar mit  $1/\sqrt{1-x}$  für  $x \rightarrow 1$ , da aber  $W(Q^2) \propto (1-x)^{3/2}$  für  $x \rightarrow 1$ , verschwindet die differentielle Rate ebenso wie auch  $W(Q^2) (g_2(Q^2) I_2(Q^2))^2$ , für  $x \rightarrow 1$ . Zusätzlich verschwindet in  $I_2$  die Integration über  $\cos(\vartheta)$ .

Das Richardson-Potential,  $V_{total}$  und  $V_J$  haben durchaus unterschiedliche Form. Wie die Plots (Abb. (B.5)) der Wellenfunktionen im Anhang aber zeigen, sind die aus diesen Potentialen resultierenden Wellenfunktionen sehr ähnlich. Die Überlappintegrale wurden daher nur mit den Wellenfunktionen berechnet, die Lösungen der Schrödingergleichung mit Richardson-Potential (Gl. (3.99) - Gl. (3.101)) sind :

| $x$  | $I_1$ | $\frac{1}{M} I_2$     | $\frac{1}{M^2} I_3$   | $\frac{1}{M^2} I_4$   | $M^2 \frac{dI}{dQ^2}$ in GeV |
|------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| 0,00 | 0,405 | $4,580 \cdot 10^{-2}$ | $1,327 \cdot 10^{-2}$ | $8,272 \cdot 10^{-3}$ | $1,667 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,01 | 0,408 | $4,595 \cdot 10^{-2}$ | $1,331 \cdot 10^{-2}$ | $8,275 \cdot 10^{-3}$ | $1,678 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,02 | 0,412 | $4,610 \cdot 10^{-2}$ | $1,335 \cdot 10^{-2}$ | $8,277 \cdot 10^{-3}$ | $1,688 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,03 | 0,416 | $4,625 \cdot 10^{-2}$ | $1,339 \cdot 10^{-2}$ | $8,279 \cdot 10^{-3}$ | $1,698 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,04 | 0,420 | $4,640 \cdot 10^{-2}$ | $1,343 \cdot 10^{-2}$ | $8,280 \cdot 10^{-3}$ | $1,708 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,05 | 0,424 | $4,654 \cdot 10^{-2}$ | $1,346 \cdot 10^{-2}$ | $8,281 \cdot 10^{-3}$ | $1,717 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,06 | 0,427 | $4,669 \cdot 10^{-2}$ | $1,350 \cdot 10^{-2}$ | $8,282 \cdot 10^{-3}$ | $1,727 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,07 | 0,431 | $4,683 \cdot 10^{-2}$ | $1,354 \cdot 10^{-2}$ | $8,282 \cdot 10^{-3}$ | $1,736 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,08 | 0,435 | $4,696 \cdot 10^{-2}$ | $1,358 \cdot 10^{-2}$ | $8,281 \cdot 10^{-3}$ | $1,745 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,09 | 0,439 | $4,710 \cdot 10^{-2}$ | $1,362 \cdot 10^{-2}$ | $8,280 \cdot 10^{-3}$ | $1,753 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,10 | 0,443 | $4,723 \cdot 10^{-2}$ | $1,365 \cdot 10^{-2}$ | $8,279 \cdot 10^{-3}$ | $1,761 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,11 | 0,447 | $4,736 \cdot 10^{-2}$ | $1,369 \cdot 10^{-2}$ | $8,277 \cdot 10^{-3}$ | $1,769 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,12 | 0,451 | $4,749 \cdot 10^{-2}$ | $1,373 \cdot 10^{-2}$ | $8,275 \cdot 10^{-3}$ | $1,777 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,13 | 0,455 | $4,761 \cdot 10^{-2}$ | $1,376 \cdot 10^{-2}$ | $8,272 \cdot 10^{-3}$ | $1,784 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,14 | 0,460 | $4,773 \cdot 10^{-2}$ | $1,380 \cdot 10^{-2}$ | $8,268 \cdot 10^{-3}$ | $1,791 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,15 | 0,464 | $4,785 \cdot 10^{-2}$ | $1,384 \cdot 10^{-2}$ | $8,264 \cdot 10^{-3}$ | $1,798 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,16 | 0,468 | $4,796 \cdot 10^{-2}$ | $1,387 \cdot 10^{-2}$ | $8,260 \cdot 10^{-3}$ | $1,804 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,17 | 0,472 | $4,807 \cdot 10^{-2}$ | $1,391 \cdot 10^{-2}$ | $8,255 \cdot 10^{-3}$ | $1,810 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,18 | 0,476 | $4,818 \cdot 10^{-2}$ | $1,394 \cdot 10^{-2}$ | $8,249 \cdot 10^{-3}$ | $1,815 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,19 | 0,481 | $4,828 \cdot 10^{-2}$ | $1,398 \cdot 10^{-2}$ | $8,243 \cdot 10^{-3}$ | $1,820 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,20 | 0,485 | $4,838 \cdot 10^{-2}$ | $1,401 \cdot 10^{-2}$ | $8,236 \cdot 10^{-3}$ | $1,825 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,21 | 0,489 | $4,848 \cdot 10^{-2}$ | $1,405 \cdot 10^{-2}$ | $8,229 \cdot 10^{-3}$ | $1,829 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,22 | 0,494 | $4,857 \cdot 10^{-2}$ | $1,408 \cdot 10^{-2}$ | $8,221 \cdot 10^{-3}$ | $1,833 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,23 | 0,498 | $4,866 \cdot 10^{-2}$ | $1,412 \cdot 10^{-2}$ | $8,213 \cdot 10^{-3}$ | $1,836 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,24 | 0,503 | $4,874 \cdot 10^{-2}$ | $1,415 \cdot 10^{-2}$ | $8,204 \cdot 10^{-3}$ | $1,839 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,25 | 0,507 | $4,882 \cdot 10^{-2}$ | $1,418 \cdot 10^{-2}$ | $8,194 \cdot 10^{-3}$ | $1,841 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,26 | 0,512 | $4,890 \cdot 10^{-2}$ | $1,422 \cdot 10^{-2}$ | $8,184 \cdot 10^{-3}$ | $1,843 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,27 | 0,517 | $4,897 \cdot 10^{-2}$ | $1,425 \cdot 10^{-2}$ | $8,173 \cdot 10^{-3}$ | $1,844 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,28 | 0,521 | $4,904 \cdot 10^{-2}$ | $1,428 \cdot 10^{-2}$ | $8,162 \cdot 10^{-3}$ | $1,845 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,29 | 0,526 | $4,910 \cdot 10^{-2}$ | $1,432 \cdot 10^{-2}$ | $8,150 \cdot 10^{-3}$ | $1,845 \cdot 10^{-12}$       |

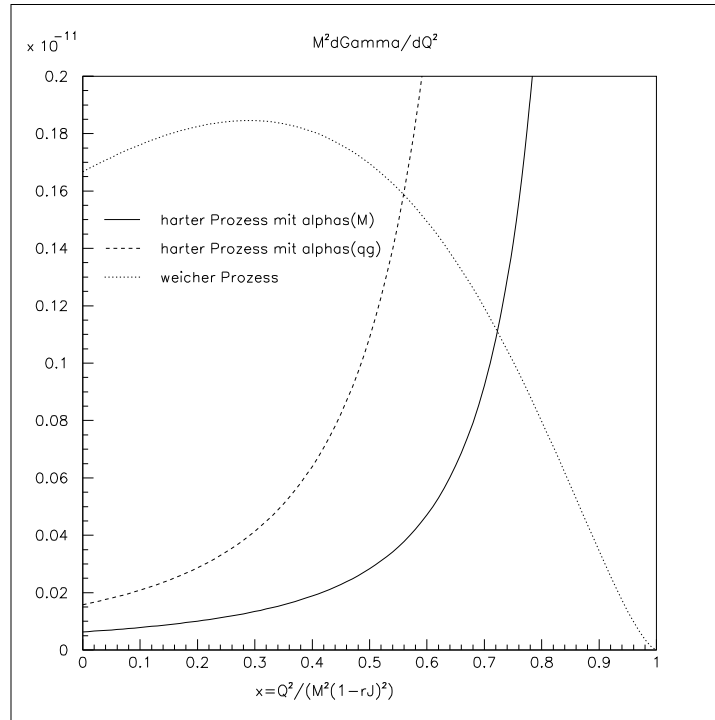
Fortsetzung:

| $x$  | $I_1$ | $\frac{1}{M} I_2$     | $\frac{1}{M^2} I_3$   | $\frac{1}{M^2} I_4$   | $M^2 \frac{d\Gamma}{dQ^2}$ in GeV |
|------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| 0,30 | 0,531 | $4,915 \cdot 10^{-2}$ | $1,435 \cdot 10^{-2}$ | $8,137 \cdot 10^{-3}$ | $1,845 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,31 | 0,536 | $4,920 \cdot 10^{-2}$ | $1,438 \cdot 10^{-2}$ | $8,123 \cdot 10^{-3}$ | $1,844 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,32 | 0,540 | $4,925 \cdot 10^{-2}$ | $1,441 \cdot 10^{-2}$ | $8,109 \cdot 10^{-3}$ | $1,843 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,33 | 0,545 | $4,929 \cdot 10^{-2}$ | $1,444 \cdot 10^{-2}$ | $8,095 \cdot 10^{-3}$ | $1,841 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,34 | 0,550 | $4,932 \cdot 10^{-2}$ | $1,447 \cdot 10^{-2}$ | $8,079 \cdot 10^{-3}$ | $1,838 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,35 | 0,555 | $4,935 \cdot 10^{-2}$ | $1,450 \cdot 10^{-2}$ | $8,063 \cdot 10^{-3}$ | $1,834 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,36 | 0,560 | $4,937 \cdot 10^{-2}$ | $1,453 \cdot 10^{-2}$ | $8,046 \cdot 10^{-3}$ | $1,830 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,37 | 0,565 | $4,938 \cdot 10^{-2}$ | $1,456 \cdot 10^{-2}$ | $8,029 \cdot 10^{-3}$ | $1,826 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,38 | 0,570 | $4,939 \cdot 10^{-2}$ | $1,459 \cdot 10^{-2}$ | $8,010 \cdot 10^{-3}$ | $1,820 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,39 | 0,575 | $4,939 \cdot 10^{-2}$ | $1,462 \cdot 10^{-2}$ | $7,991 \cdot 10^{-3}$ | $1,814 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,40 | 0,580 | $4,939 \cdot 10^{-2}$ | $1,465 \cdot 10^{-2}$ | $7,972 \cdot 10^{-3}$ | $1,807 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,41 | 0,586 | $4,938 \cdot 10^{-2}$ | $1,467 \cdot 10^{-2}$ | $7,951 \cdot 10^{-3}$ | $1,800 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,42 | 0,591 | $4,936 \cdot 10^{-2}$ | $1,470 \cdot 10^{-2}$ | $7,930 \cdot 10^{-3}$ | $1,791 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,43 | 0,596 | $4,933 \cdot 10^{-2}$ | $1,473 \cdot 10^{-2}$ | $7,908 \cdot 10^{-3}$ | $1,782 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,44 | 0,601 | $4,929 \cdot 10^{-2}$ | $1,475 \cdot 10^{-2}$ | $7,886 \cdot 10^{-3}$ | $1,772 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,45 | 0,607 | $4,925 \cdot 10^{-2}$ | $1,478 \cdot 10^{-2}$ | $7,862 \cdot 10^{-3}$ | $1,761 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,46 | 0,612 | $4,920 \cdot 10^{-2}$ | $1,481 \cdot 10^{-2}$ | $7,838 \cdot 10^{-3}$ | $1,750 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,47 | 0,618 | $4,914 \cdot 10^{-2}$ | $1,483 \cdot 10^{-2}$ | $7,813 \cdot 10^{-3}$ | $1,737 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,48 | 0,623 | $4,907 \cdot 10^{-2}$ | $1,486 \cdot 10^{-2}$ | $7,787 \cdot 10^{-3}$ | $1,724 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,49 | 0,629 | $4,899 \cdot 10^{-2}$ | $1,488 \cdot 10^{-2}$ | $7,760 \cdot 10^{-3}$ | $1,710 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,50 | 0,634 | $4,890 \cdot 10^{-2}$ | $1,490 \cdot 10^{-2}$ | $7,733 \cdot 10^{-3}$ | $1,695 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,51 | 0,640 | $4,880 \cdot 10^{-2}$ | $1,493 \cdot 10^{-2}$ | $7,705 \cdot 10^{-3}$ | $1,679 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,52 | 0,646 | $4,869 \cdot 10^{-2}$ | $1,495 \cdot 10^{-2}$ | $7,675 \cdot 10^{-3}$ | $1,662 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,53 | 0,651 | $4,857 \cdot 10^{-2}$ | $1,497 \cdot 10^{-2}$ | $7,645 \cdot 10^{-3}$ | $1,645 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,54 | 0,657 | $4,844 \cdot 10^{-2}$ | $1,499 \cdot 10^{-2}$ | $7,615 \cdot 10^{-3}$ | $1,626 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,55 | 0,663 | $4,830 \cdot 10^{-2}$ | $1,501 \cdot 10^{-2}$ | $7,583 \cdot 10^{-3}$ | $1,606 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,56 | 0,669 | $4,814 \cdot 10^{-2}$ | $1,504 \cdot 10^{-2}$ | $7,550 \cdot 10^{-3}$ | $1,586 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,57 | 0,675 | $4,798 \cdot 10^{-2}$ | $1,506 \cdot 10^{-2}$ | $7,517 \cdot 10^{-3}$ | $1,564 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,58 | 0,681 | $4,780 \cdot 10^{-2}$ | $1,507 \cdot 10^{-2}$ | $7,482 \cdot 10^{-3}$ | $1,542 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,59 | 0,687 | $4,761 \cdot 10^{-2}$ | $1,509 \cdot 10^{-2}$ | $7,447 \cdot 10^{-3}$ | $1,518 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,60 | 0,693 | $4,740 \cdot 10^{-2}$ | $1,511 \cdot 10^{-2}$ | $7,411 \cdot 10^{-3}$ | $1,494 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,61 | 0,699 | $4,718 \cdot 10^{-2}$ | $1,513 \cdot 10^{-2}$ | $7,374 \cdot 10^{-3}$ | $1,468 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,62 | 0,705 | $4,694 \cdot 10^{-2}$ | $1,515 \cdot 10^{-2}$ | $7,335 \cdot 10^{-3}$ | $1,442 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,63 | 0,711 | $4,669 \cdot 10^{-2}$ | $1,516 \cdot 10^{-2}$ | $7,296 \cdot 10^{-3}$ | $1,414 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,64 | 0,717 | $4,642 \cdot 10^{-2}$ | $1,518 \cdot 10^{-2}$ | $7,256 \cdot 10^{-3}$ | $1,385 \cdot 10^{-12}$            |
| 0,65 | 0,724 | $4,614 \cdot 10^{-2}$ | $1,520 \cdot 10^{-2}$ | $7,215 \cdot 10^{-3}$ | $1,356 \cdot 10^{-12}$            |

Fortsetzung:

| $x$  | $I_1$ | $\frac{1}{M} I_2$     | $\frac{1}{M^2} I_3$   | $\frac{1}{M^2} I_4$   | $M^2 \frac{dI}{dQ^2}$ in GeV |
|------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| 0,66 | 0,730 | $4,584 \cdot 10^{-2}$ | $1,521 \cdot 10^{-2}$ | $7,174 \cdot 10^{-3}$ | $1,325 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,67 | 0,736 | $4,552 \cdot 10^{-2}$ | $1,522 \cdot 10^{-2}$ | $7,131 \cdot 10^{-3}$ | $1,294 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,68 | 0,743 | $4,518 \cdot 10^{-2}$ | $1,524 \cdot 10^{-2}$ | $7,087 \cdot 10^{-3}$ | $1,261 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,69 | 0,749 | $4,482 \cdot 10^{-2}$ | $1,525 \cdot 10^{-2}$ | $7,042 \cdot 10^{-3}$ | $1,228 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,70 | 0,756 | $4,444 \cdot 10^{-2}$ | $1,526 \cdot 10^{-2}$ | $6,996 \cdot 10^{-3}$ | $1,193 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,71 | 0,762 | $4,404 \cdot 10^{-2}$ | $1,527 \cdot 10^{-2}$ | $6,949 \cdot 10^{-3}$ | $1,157 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,72 | 0,769 | $4,362 \cdot 10^{-2}$ | $1,529 \cdot 10^{-2}$ | $6,901 \cdot 10^{-3}$ | $1,121 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,73 | 0,776 | $4,317 \cdot 10^{-2}$ | $1,530 \cdot 10^{-2}$ | $6,852 \cdot 10^{-3}$ | $1,083 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,74 | 0,782 | $4,270 \cdot 10^{-2}$ | $1,531 \cdot 10^{-2}$ | $6,802 \cdot 10^{-3}$ | $1,045 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,75 | 0,789 | $4,220 \cdot 10^{-2}$ | $1,531 \cdot 10^{-2}$ | $6,750 \cdot 10^{-3}$ | $1,006 \cdot 10^{-12}$       |
| 0,76 | 0,796 | $4,167 \cdot 10^{-2}$ | $1,532 \cdot 10^{-2}$ | $6,698 \cdot 10^{-3}$ | $9,657 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,77 | 0,803 | $4,112 \cdot 10^{-2}$ | $1,533 \cdot 10^{-2}$ | $6,645 \cdot 10^{-3}$ | $9,248 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,78 | 0,810 | $4,053 \cdot 10^{-2}$ | $1,534 \cdot 10^{-2}$ | $6,590 \cdot 10^{-3}$ | $8,830 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,79 | 0,817 | $3,991 \cdot 10^{-2}$ | $1,534 \cdot 10^{-2}$ | $6,535 \cdot 10^{-3}$ | $8,406 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,80 | 0,824 | $3,925 \cdot 10^{-2}$ | $1,535 \cdot 10^{-2}$ | $6,478 \cdot 10^{-3}$ | $7,974 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,81 | 0,831 | $3,855 \cdot 10^{-2}$ | $1,535 \cdot 10^{-2}$ | $6,420 \cdot 10^{-3}$ | $7,536 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,82 | 0,838 | $3,782 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $6,361 \cdot 10^{-3}$ | $7,092 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,83 | 0,845 | $3,704 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $6,301 \cdot 10^{-3}$ | $6,644 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,84 | 0,853 | $3,621 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $6,240 \cdot 10^{-3}$ | $6,191 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,85 | 0,860 | $3,534 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $6,178 \cdot 10^{-3}$ | $5,736 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,86 | 0,867 | $3,440 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $6,114 \cdot 10^{-3}$ | $5,278 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,87 | 0,875 | $3,341 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $6,049 \cdot 10^{-3}$ | $4,820 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,88 | 0,882 | $3,235 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $5,983 \cdot 10^{-3}$ | $4,362 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,89 | 0,890 | $3,121 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $5,916 \cdot 10^{-3}$ | $3,907 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,90 | 0,897 | $2,998 \cdot 10^{-2}$ | $1,536 \cdot 10^{-2}$ | $5,848 \cdot 10^{-3}$ | $3,456 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,91 | 0,905 | $2,866 \cdot 10^{-2}$ | $1,535 \cdot 10^{-2}$ | $5,778 \cdot 10^{-3}$ | $3,011 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,92 | 0,912 | $2,723 \cdot 10^{-2}$ | $1,535 \cdot 10^{-2}$ | $5,707 \cdot 10^{-3}$ | $2,575 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,93 | 0,920 | $2,567 \cdot 10^{-2}$ | $1,534 \cdot 10^{-2}$ | $5,635 \cdot 10^{-3}$ | $2,151 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,94 | 0,928 | $2,395 \cdot 10^{-2}$ | $1,534 \cdot 10^{-2}$ | $5,561 \cdot 10^{-3}$ | $1,742 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,95 | 0,936 | $2,203 \cdot 10^{-2}$ | $1,533 \cdot 10^{-2}$ | $5,487 \cdot 10^{-3}$ | $1,352 \cdot 10^{-13}$       |
| 0,96 | 0,944 | $1,985 \cdot 10^{-2}$ | $1,532 \cdot 10^{-2}$ | $5,411 \cdot 10^{-3}$ | $9,871 \cdot 10^{-14}$       |
| 0,97 | 0,952 | $1,732 \cdot 10^{-2}$ | $1,531 \cdot 10^{-2}$ | $5,334 \cdot 10^{-3}$ | $6,542 \cdot 10^{-14}$       |
| 0,98 | 0,960 | $1,425 \cdot 10^{-2}$ | $1,530 \cdot 10^{-2}$ | $5,255 \cdot 10^{-3}$ | $3,634 \cdot 10^{-14}$       |
| 0,99 | 0,968 | $1,015 \cdot 10^{-2}$ | $1,529 \cdot 10^{-2}$ | $5,175 \cdot 10^{-3}$ | $1,311 \cdot 10^{-14}$       |
| 1,00 | 0,976 | 0                     | $1,528 \cdot 10^{-2}$ | $5,094 \cdot 10^{-3}$ | 0                            |

Graphisch stellen sich die differentiellen Raten aus der harten und der weichen Rechnung nun folgendermaßen dar:



Die Schnittpunkte der weichen Kurve mit den beiden harten Kurven liegen zwischen:

| mit $\alpha_s = \alpha_s(M_{B_c}^2)$ | mit $\alpha_s = \alpha_s(q_g^2)$ |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| 0,72 .. 0,73                         | 0,55 .. 0,56                     |

Für den Fall  $\alpha_s = \alpha_s(M_{B_c}^2)$  ergibt das Integral über den harten Bereich von  $x = 0$  bis  $x = 0,72$

$$\Gamma_{hart} = 54,03 \cdot 10^{-15} \text{ GeV} \quad (3.238)$$

Simpsonintegration über den restlichen weichen Bereich von  $x = 0,72$  bis  $x = 1$  ergibt:

$$\Gamma_{weich} = 42,57 \cdot 10^{-15} \text{ GeV} \quad (3.239)$$

Insgesamt also:

$$\Gamma = \Gamma_{hart} + \Gamma_{weich} = (54,03 + 42,57) \cdot 10^{-15} \text{ GeV} = 96,60 \cdot 10^{-15} \text{ GeV} \quad (3.240)$$

Mit  $\alpha_s = \alpha_s(q_g^2)$  ergibt eine Vegas-Integration über den harten Bereich von 0 bis 0,56

$$\Gamma_{hart} = 91,45 \cdot 10^{-15} \text{ GeV} \quad (3.241)$$

Simpsonintegration über den restlichen weichen Bereich von  $x = 0,56$  bis  $x = 1$  ergibt:

$$\Gamma_{weich} = 105,41 \cdot 10^{-15} \text{ GeV} \quad (3.242)$$

Insgesamt also:

$$\Gamma = \Gamma_{hart} + \Gamma_{weich} = (91,45 + 105,41) \cdot 10^{-15} \text{ GeV} = 196,86 \cdot 10^{-15} \text{ GeV} \quad (3.243)$$

Die beiden Fälle unterscheiden sich also um mehr als einen Faktor 2. Ein Vergleich mit der Literatur

| Quelle       | $\Gamma$   | BR   |
|--------------|--|--|
| diese Arbeit | $96,60 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$<br>.. $196,86 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$ | $67,6 \cdot 10^{-3}$<br>.. $137,7 \cdot 10^{-3}$ |
| [40]         | $5,9 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$   | $4,1 \cdot 10^{-3}$                              |
| [41]         | $14,01 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$   | $9,8 \cdot 10^{-3}$                              |
| [42]         | $11 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$  | $9 \cdot 10^{-3}$                                |
| [43]         | $11,1 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$  | $7,8 \cdot 10^{-3}$                              |
| [44]         | $14,2 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$  | $9,9 \cdot 10^{-3}$                              |
| [45]         | $2,1 \cdot 10^{-15} \text{ GeV}$   | $1,5 \cdot 10^{-3}$                              |
| [46]         | $13,05 \cdot 10^{-3} \text{ ps}^{-1}$  | $6 \cdot 10^{-3}$                                |
| [47]         | $10,355 \cdot 10^{-3} \text{ ps}^{-1}$                                       | $5,2 \cdot 10^{-3}$                              |

zeigt, dass beide hier errechneten Verzweigungsverhältnisse deutlich größer sind, als in allen anderen Rechnungen. Wobei eine deutliche Abweichung nach oben nach einem Blick auf die Graphen zu erwarten ist, denn beide Kurven liegen am entgegen gesetzten Ende ihres Gültigkeitsbereiches deutlich über der dort gültigen differentiellen Rate, sind also zu groß. Gerade im Bereich der Schnittpunkte, von wo der größte Beitrag zur Gesamtrate kommt, sind möglicherweise beide differentielle Raten mit einem großen Fehler behaftet. Ob dies einen Faktor sechs bis sieben Unterschied zur größten bisher berechneten Rate erklären kann, ist aber fraglich.



# Zusammenstellung der Ergebnisse

In niedrigster Ordnung zerfällt das  $B_c$  entweder durch einen Spectatorzerfall oder durch schwache Annihilation. Für verschiedene Massen wurden die Raten hierzu berechnet.

Stellt man nun die Verzweigungsverhältnisse nebeneinander,

| $m_b$ | $m_c$ | $BR_{Spec.}$ | $BR_{Ann.}$ | $BR_{Spec.} + BR_{Ann.}$ |
|-------|-------|--------------|-------------|--------------------------|
| 4,25  | 1,2   | 0,35         | 0,045       | 0,40                     |
| 4,731 | 1,323 | 0,59         | 0,050       | 0,64                     |
| 4,75  | 1,563 | 0,99         | 0,061       | 1,05                     |
| 4,85  | 1,65  | 1,25         | 0,065       | 1,32                     |
| 4,918 | 1,491 | 0,90         | 0,058       | 0,96                     |
| 5,255 | 1,900 | 2,38         | 0,077       | 2,46                     |

erkennt man, dass in diesem Fall die Wahl der Massen auf Grund des Richardson- und (ein wenig erstaunlich) des Coulombpotentials die besten Ergebnisse liefert.

U.a. wegen destruktiver Interferenzen der einzelnen Beiträge zu den QED-Korrekturen zur masselosen Annihilation, ist das errechnete Verzweigungsverhältnis mit  $BR = 0,622 \cdot 10^{-3}$  recht klein.

Die Ergebnisse der numerischen und der analytischen Berechnung der Rate des Strahlungsüberganges vom Triplet in den Singlettzustand liegen (außer für  $V_{total}$ ) um 30%- 40% auseinander.

Da aber die Ergebnisse für die verschiedenen in anderen Bereichen gleichermaßen erfolgreichen phänomenologischen Potentiale ebenfalls stark variieren, ist dies nur eine unter mehreren Unsicherheiten. Zusätzlich macht die Abhängigkeit in dritter Potenz von der Hyperfeinaufspaltungsenergie ( $\cong$  Massendifferenz) eine Vorhersage der Rate schwierig.

Die Berechnung des semileptonischen Zerfalls nach  $\eta_c$  liefert - im Vergleich mit der Literatur - sehr große Werte für die Rate. Auch ohne Literaturvergleich zeigt die Unsicherheit (Faktor 2), die sich aus den unterschiedlichen

---

Möglichkeiten  $\alpha_s$  zu wählen und aus der Form der differentiellen Rate im Bereich des Schnittpunktes der Kurven ergibt, dass die berechnete Rate allenfalls als eine grobe obere Schranke für den tatsächlichen Wert zu sehen ist:  $\Gamma < 100 \cdot 10^{-15}$  GeV.

---

# Anhang A

## Phasenraumintegration

Für den Zerfall eines Teilchens oder eines Teilchensystems ohne Relativimpulse werden die physikalischen Bereiche des Phasenraumes hergeleitet:

### A.1 Eins nach Zwei

Def. des Phasenraumelementes:

$$dR_2 = \int \frac{d^3|\vec{p}_1|}{(2\pi)^3(2E_1)} \int \frac{d^3|\vec{p}_2|}{(2\pi)^3(2E_2)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2) \quad (\text{A.1})$$

Wobei

$$P = (M, \vec{0}) = (\sqrt{S}, \vec{0}) \quad (\text{A.2})$$

ist. D.h. das Lorentz-Inertialsystem (LIS) der Integration ist das Schwerpunktsystem (CMS).

Mit

$$\int \frac{d^3|\vec{p}|}{(2\pi)^3(2E)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{A.3})$$

folgt hier:

$$dR_2 = \int \frac{d^3|\vec{p}_1|}{(2\pi)^3(2E_1)} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p_2^2 - m_2^2) (2\pi)^4 \delta(P - p_1 - p_2) \quad (\text{A.4})$$

Integration über  $p_2$  ausführen (und Konstanten einsammeln) ergibt:

$$dR_2 = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \frac{d^3|\vec{p}_1|}{E_1} \delta((P - p_1)^2 - m_2^2) \quad (\text{A.5})$$

---

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit einige Definitionen:

$$x_i := 2 \frac{P \cdot p_i}{S} \quad (\text{A.6})$$

$$r_i := \frac{m_i}{\sqrt{S}} \quad (\text{A.7})$$

$$\beta_i = \frac{|\vec{p}_i|}{p_i^0} \quad (\text{A.8})$$

Energie-Impuls-Erhaltung und -Beziehung sehen damit folgendermaßen aus:

$$\sum_i x_i = 2 \quad (\text{A.9})$$

$$\sum_i r_i \leq 1 \quad (\text{A.10})$$

$$\beta_i x_i = \sqrt{x_i^2 - 4r_i^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{\beta_i} = \frac{d|\vec{p}_i|}{dp_i^0} \quad (\text{A.12})$$

Und (A.5) wird zu

$$dR_2 = \frac{S}{2(2\pi)^2} \int dx_1 \beta_1 x_1 \int d\Omega_1 \delta(S(1 + r_1^2 - r_2^2 - x_1)) \quad (\text{A.13})$$

Wähle nun die  $\hat{p}_1$  Richtung als z-Achse. Dies ist immer möglich, da keine äußere Vorzugsrichtung (wie z.B. eine Strahlachse bei einem Kollisionsexperiment) gegeben ist. Somit kann auch über  $\Omega_1$  integriert werden.

$$dR_2 = \frac{1}{8\pi} \sqrt{((1 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2)} \Big|_{x_1=1+r_1^2-r_2^2} \Big|_{p_2=P-p_1} \quad (\text{A.14})$$

Das Matricelement enthält also keine Phasenraumvariablen mehr, die nicht durch äußere Bedingungen festgelegt sind. Dies entspricht Ref. [28] S.49.

Insbesondere ist dies für masselose Endzustände:

$$dR_2 = \frac{1}{8\pi} \Big|_{x_1=1} \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Eins nach Drei

Def. des Phasenraumelementes:

$$dR_3 = \int \frac{d^3|\vec{p}_1|}{(2\pi)^3(2E_1)} \int \frac{d^3|\vec{p}_2|}{(2\pi)^3(2E_2)} \int \frac{d^3|\vec{p}_3|}{(2\pi)^3(2E_3)} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) \quad (\text{A.16})$$

Wobei

$$P = (M, \vec{0}) = (\sqrt{S}, \vec{0}) \quad (\text{A.17})$$

ist. D.h. das Lorentz-Inertialsystem (LIS) der Integration ist das Schwerpunktsystem (CMS).

Mit

$$\int \frac{d^3|\vec{p}|}{(2\pi)^3(2E)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^2 - m^2) \quad (\text{A.18})$$

folgt hier:

$$dR_3 = \int \frac{d^3|\vec{p}_1|}{(2\pi)^3(2E_1)} \int \frac{d^3|\vec{p}_2|}{(2\pi)^3(2E_2)} \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p_3^2 - m_3^2) (2\pi)^4 \delta(P - p_1 - p_2 - p_3) \quad (\text{A.19})$$

Integration über  $p_3$  ausführen (und Konstanten einsammeln) ergibt:

$$dR_3 = \frac{1}{4(2\pi)^5} \int \frac{d^3|\vec{p}_1|}{E_1} \int \frac{d^3|\vec{p}_2|}{E_2} \delta((P - p_1 - p_2)^2 - m_3^2) \quad (\text{A.20})$$

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit einige Definitionen:

$$x_i := 2 \frac{P \cdot p_i}{S} \quad (\text{A.21})$$

$$r_i := \frac{m_i}{\sqrt{S}} \quad (\text{A.22})$$

$$\beta_i = \frac{|\vec{p}_i|}{p_i^0} \quad (\text{A.23})$$

Energie-Impuls-Erhaltung und -Beziehung sehen damit folgendermaßen aus:

$$\sum_i x_i = 2 \quad (\text{A.24})$$

$$\sum_i r_i \leq 1 \quad (\text{A.25})$$

$$\beta_i x_i = \sqrt{x_i^2 - 4r_i^2} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{1}{\beta_i} = \frac{d|\vec{p}_i|}{dp_i^0} \quad (\text{A.27})$$

Damit wird (A.20) zu

$$dR_3 = \frac{S^2}{64(2\pi)^5} \int dx_1 \beta_1 x_1 \int d\Omega_1 \int dx_2 \beta_2 x_2 \int d\Omega_2 \delta(S(1 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1 x_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos(\sphericalangle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)))))) \quad (\text{A.28})$$

Wähle nun die  $\hat{p}_1$  Richtung als z-Achse. Dies ist immer möglich, da keine äußere Vorzugsrichtung (wie z.B. eine Strahlachse bei einem Kollisionsexperiment) gegeben ist. Dann gilt  $\sphericalangle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \theta_2$ . Über  $\Omega_1$  kann nun integriert werden. Wähle weiterhin die senkrechte Projektion von  $p_2$  auf die Ebene senkrecht zu  $p_1$  als x-Achse. Dann kann auch über  $\Phi_2$  integriert werden. Man erhält:

$$dR_3 = \frac{S^2}{32(2\pi)^3} \int dx_1 \beta_1 x_1 \int dx_2 \beta_2 x_2 \int_{-1}^1 d \cos(\theta_2) \delta\left(\frac{Sx_1 \beta_1 x_2 \beta_2}{2} \left(\frac{2}{x_1 \beta_1 x_2 \beta_2} (1 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_1 x_2) - \cos(\theta_2)\right)\right) \quad (\text{A.29})$$

Schließlich kann noch die Integration über  $\cos(\theta_2)$  ausgeführt werden:

$$dR_3 = \frac{S}{16(2\pi)^3} \int dx_1 \int dx_2 \Big|_{\cos(\theta_2)=\cos(\theta_{20})} \Big|_{p_3=P-p_1-p_2} \quad (\text{A.30})$$

$$\text{mit } \cos(\theta_{20}) = 2 \frac{1 + r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - x_1 - x_2 + \frac{x_1 x_2}{2}}{\sqrt{x_1^2 - 4r_1^2} \sqrt{x_2^2 - 4r_2^2}} \quad (\text{A.31})$$

Es bleiben also noch zwei Integrationen übrig, die über Variablen laufen, die im Matrixelement tatsächlich vorkommen können, d.h. die unabhängig sind und nicht durcheinander ausgedrückt werden können. Dies entspricht Ref. [28] S.49.

NB:  $\cos(\theta_2)$  kann nur durch das Skalarprodukt  $(p_1 p_2)$  im Ergebnis auftauchen. Daher kann gleich

$$2 \frac{p_1 p_2}{M^2} = -1 + x_1 + x_2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 \quad (\text{A.32})$$

verwendet werden, so dass  $\cos(\theta_2)$  nie auftaucht, nur um gleich wieder ersetzt zu werden.

Die Grenzen der Integrationen über  $x_1$  und  $x_2$  erhält man aus der Bedingung

$$|\cos(\theta_2)| \leq 1 \quad (\text{A.33})$$

Diese Gleichung liefert zwei Lösungen. Es sind die Grenzen  $x_2^{min}(x_1)$  und  $x_2^{max}(x_1)$  für die erste Integration (über  $x_2$ ). Gleichsetzen der beiden Lösungen liefert bis zu vier Lösungen für  $x_1$ . Die Bedingungen (A.25) bis (A.27) legen  $x_1^{min}$  und  $x_1^{max}$  jedoch eindeutig fest.

Die Grenzen sind:

**Alle drei Teilchen haben verschiedene Massen.**

$$x_2^{min}(x_1) = \frac{1}{2(1+r_1^2-x_1)} \left( (2-x_1)^2 + (2-x_1)(r_1^2+r_2^2-r_3^2-1) - \sqrt{(x_1^2-4r_1^2)((1+r_1^2-r_2^2-r_3^2-x_1)^2-4r_2^2r_3^2)} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$x_2^{max}(x_1) = \frac{1}{2(1+r_1^2-x_1)} \left( (2-x_1)^2 + (2-x_1)(r_1^2+r_2^2-r_3^2-1) + \sqrt{(x_1^2-4r_1^2)((1+r_1^2-r_2^2-r_3^2-x_1)^2-4r_2^2r_3^2)} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$x_1^{min} = 2r_1 \quad (\text{A.36})$$

$$x_1^{max} = 1+r_1^2-(r_2+r_3)^2 \quad (\text{A.37})$$

Vereinfachungen ergeben sich natürlich, wenn Teilchen masselos sind, oder gleiche Massen haben. Je nachdem welche Teilchen man dann welchem Index zuordnet, ergeben sich dann unterschiedliche Vereinfachungen. Es folgen nun einige Beispiele der Vereinfachungen. Dabei ist natürlich zu beachten, dass  $r_3$  die normierte Masse des Teilchens ist, dessen Impuls man durch die Impulserhaltung eliminiert. Mit  $r_2$  ist die normierte Masse des Teilchens, über dessen normierte Energie zuerst integriert wird und mit  $r_1$  ist die normierte Masse des Teilchens, über dessen normierte Energie zuletzt integriert wird gemeint.

**Ein Teilchen ist masselos.** Sei „1“ masselos.

(A.34) - (A.37) werden dann zu:

$$x_2^{min}(x_1) = \frac{1}{2(1-x_1)} \left( (2-x_1)(1+r_2^2-r_3^2-x_1) - x_1 \sqrt{(1-(r_2-r_3)^2-x_1)(1-(r_2+r_3)^2-x_1)} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$x_2^{max}(x_1) = \frac{1}{2(1-x_1)} \left( (2-x_1)(1+r_2^2-r_3^2-x_1) + x_1 \sqrt{(1-(r_2-r_3)^2-x_1)(1-(r_2+r_3)^2-x_1)} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$x_1^{min} = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$x_1^{max} = 1 - (r_2 + r_3)^2 \quad (\text{A.41})$$

**Zwei Teilchen haben die gleiche Masse.** Seien „2“ und „3“ gleich schwer ( $r_2 = r_3 =: r$ ):

$$x_2^{min}(x_1) = \frac{1}{2} \left( 2 - x_1 - \sqrt{(x_1^2 - 4r^2) \left( 1 - 4 \frac{r^2}{1 + r_1^2 - x_1} \right)} \right) \quad (\text{A.42})$$

$$x_2^{max}(x_1) = \frac{1}{2} \left( 2 - x_1 + \sqrt{(x_1^2 - 4r^2) \left( 1 - 4 \frac{r^2}{1 + r_1^2 - x_1} \right)} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$x_1^{min} = 2r_1 \quad (\text{A.44})$$

$$x_1^{max} = 1 + r_1^2 - 4r^2 \quad (\text{A.45})$$

**Zwei Teilchen haben die gleiche Masse, das dritte ist masselos.** Seien „2“ und „3“ gleich schwer:

$$x_2^{min}(x_1) = \frac{1}{2} \left( 2 - x_1 - x_1 \sqrt{\left( 1 - 4 \frac{r^2}{1 - x_1} \right)} \right) \quad (\text{A.46})$$

$$x_2^{max}(x_1) = \frac{1}{2} \left( 2 - x_1 + x_1 \sqrt{\left( 1 - 4 \frac{r^2}{1 - x_1} \right)} \right) \quad (\text{A.47})$$

$$x_1^{min} = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$x_1^{max} = 1 - 4r^2 \quad (\text{A.49})$$



**Zwei Teilchen sind masselos.** Seien „1“ und „2“ masselos:

$$x_2^{min}(x_1) = 1 - x_1 - r_3^2 \quad (\text{A.50})$$

$$x_2^{max}(x_1) = \frac{1 - x_1 - r_3^2}{1 - x_1} \quad (\text{A.51})$$

$$x_1^{min} = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$x_1^{max} = 1 - r_3^2 \quad (\text{A.53})$$

**Alle drei Teilchen haben die gleiche Masse.**  $r_1 = r_2 = r_3 =: r$

$$x_2^{min}(x_1) = \frac{1}{2} \left( (2 - x_1) - \sqrt{(x_1^2 - 4r^2) \left(1 - \frac{4r^2}{1 - x_1 + r^2}\right)} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$x_2^{max}(x_1) = \frac{1}{2} \left( (2 - x_1) + \sqrt{(x_1^2 - 4r^2) \left(1 - \frac{4r^2}{1 - x_1 + r^2}\right)} \right) \quad (\text{A.55})$$

$$x_1^{min} = 2r \quad (\text{A.56})$$

$$x_1^{max} = 1 - 3r^2 \quad (\text{A.57})$$

**Alle drei Teilchen sind masselos.**

$$x_2^{min}(x_1) = 1 - x_1 \quad (\text{A.58})$$

$$x_2^{max}(x_1) = 1 \quad (\text{A.59})$$

$$x_1^{min} = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$x_1^{max} = 1 \quad (\text{A.61})$$



# Anhang B

## Potentiale und Wellenfunktionen

$$V_{Coul} = -\frac{\frac{4}{3}\alpha_s}{r} \quad (\text{B.1})$$

$$\tilde{V}_{Rich.}(\vec{q}^2) = -\frac{4}{3} \frac{12\pi}{33 - 2n_f} \frac{1}{\vec{q}^2} \frac{1}{\ln(1 + \vec{q}^2/\Lambda^2)} \quad (\text{B.2})$$

$$V(r) = \frac{8\pi}{33 - 2n_f} \Lambda \left( \Lambda r - \frac{f(\Lambda r)}{\Lambda r} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$f(\Lambda r) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\Lambda r} dq \frac{\sin(q\Lambda r)}{q} \left[ \frac{1}{\ln(1 + q^2)} - \frac{1}{q^2} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\Lambda = 398 \text{ MeV} \quad (\text{B.5})$$

$$V_{total} = -\frac{16\pi}{25} \frac{1}{rf(r)} \left[ 1 + \frac{2\gamma_E + \frac{53}{75}}{f(r)} - \frac{462 \ln(f(r))}{625 f(r)} \right] + a\sqrt{r} + c \quad (\text{B.6})$$

$$f(r) = \ln \left( \frac{1}{(\Lambda_{\overline{MS}} r)^2} + b \right) \quad (\text{B.7})$$

$$a = 0, 63 \text{ GeV}^{3/2}, b = 20, c = -1, 39 \text{ GeV}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}} = 0, 14 \text{ GeV}, \gamma_E \cong 0, 5772 \text{ Eulerkonstante}$$

---

$$V_J = -\frac{16\pi}{25} \frac{1}{r f(r)} \left[ 1 + \frac{2\gamma_E + \frac{53}{75}}{f(r)} - \frac{462 \ln(f(r))}{625 f(r)} \right]$$

$$f(r) = \ln \left( \frac{1}{(\Lambda_{\overline{MS}} r)^2} + b \right) \tag{B.8}$$

$$+ d r e^{-gr} + a r \tag{B.9}$$

mit

$$a = 0,159 \text{ GeV}^2, b = 20, g = 0,344 \text{ GeV}, d = 0,255 \text{ GeV}^2$$

$$\Lambda_{\overline{MS}} = 0,2 \text{ GeV}, \gamma_E \cong 0,5772 \text{ Eulerkonstante}$$

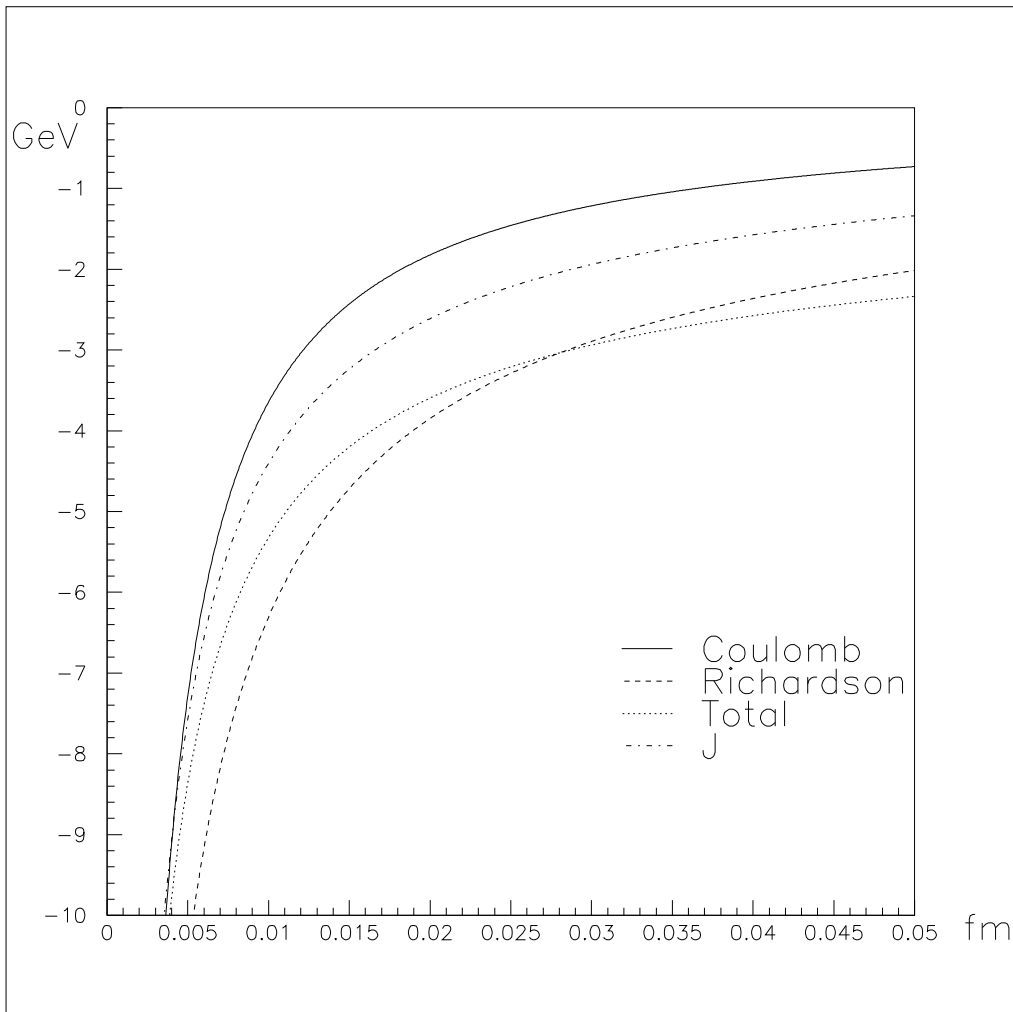


Abbildung B.1: Potentiale (Nahbereich)

Für das starke Coulombpotential ist  $\alpha_s = \alpha_s(m_b^2)$ ,  $m_b = 4,75$  GeV und für das Richardsonpotential ist  $n_f = 4$ .

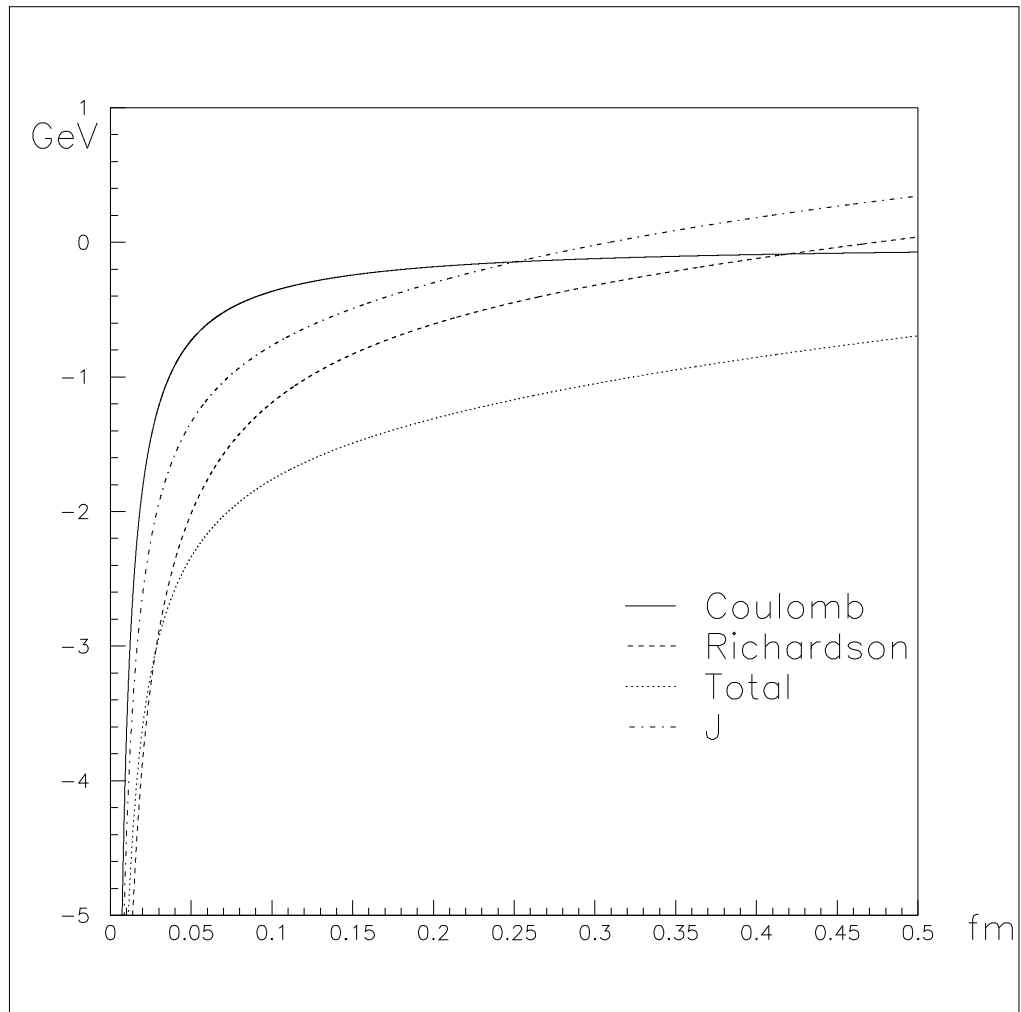


Abbildung B.2: Potentiale (mittlerer Bereich)

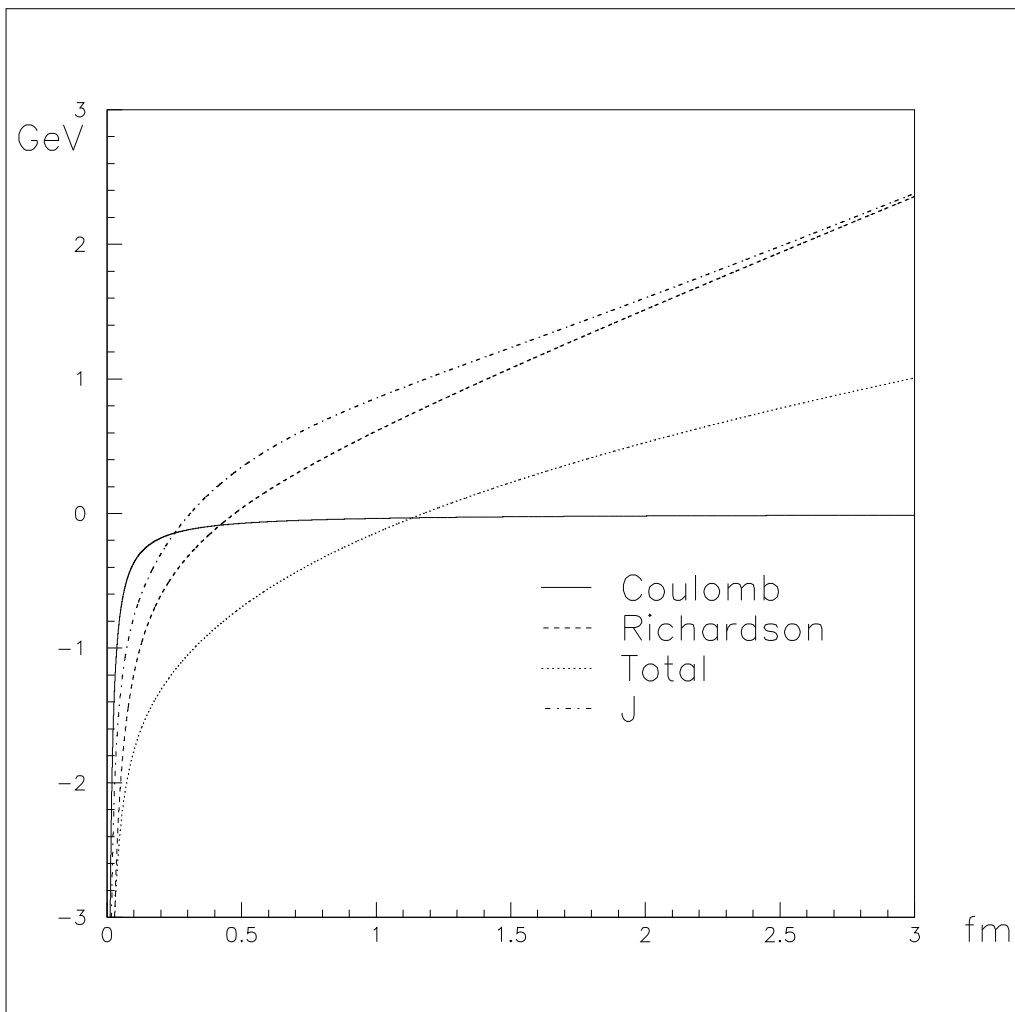


Abbildung B.3: Potentiale (Fernbereich)

Mit diesen Potentialen ergeben sich für das  $B_c$  Meson die folgenden Wellenfunktionen:

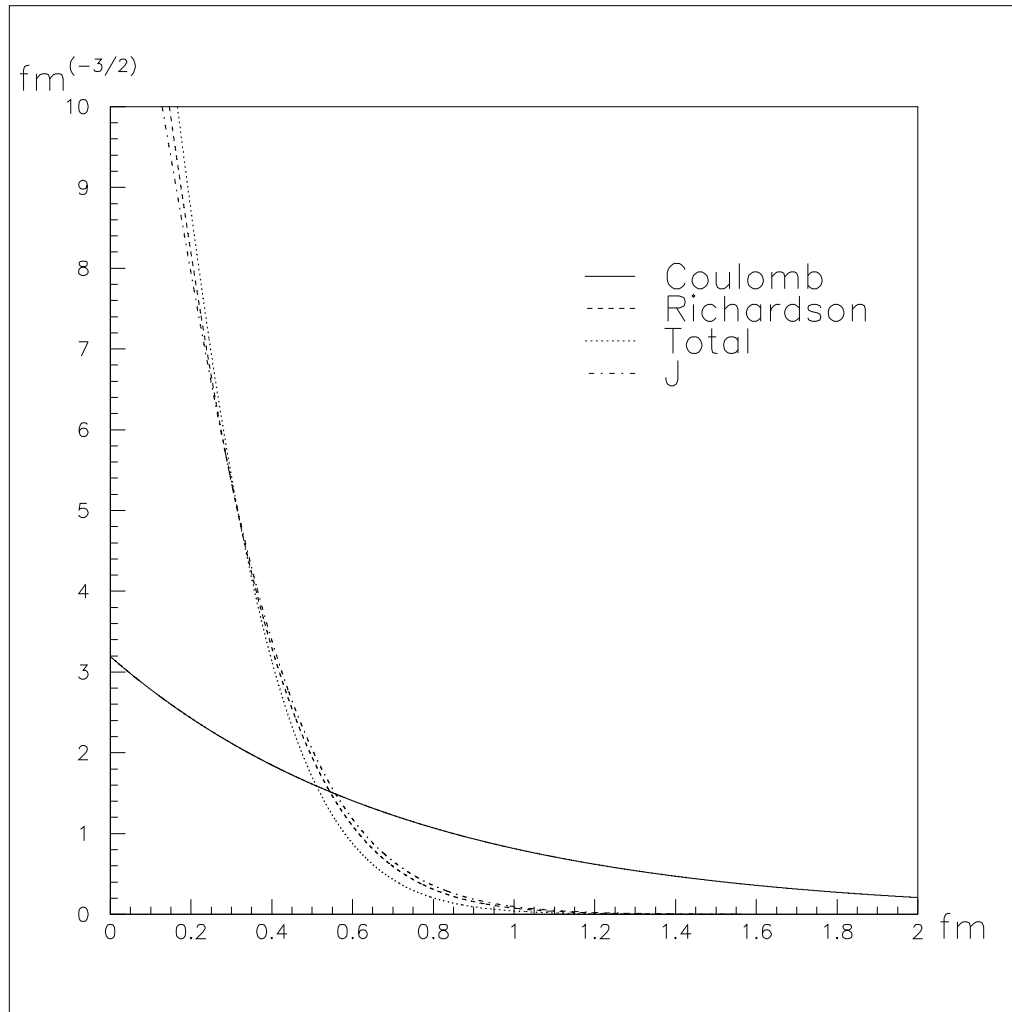


Abbildung B.4: radiale Ortswellenfunktionen (Grundzustand)- Lösungen der Schrödingergleichung mit den entsprechenden Potentialen und den unten angegebenen Quarkmassen



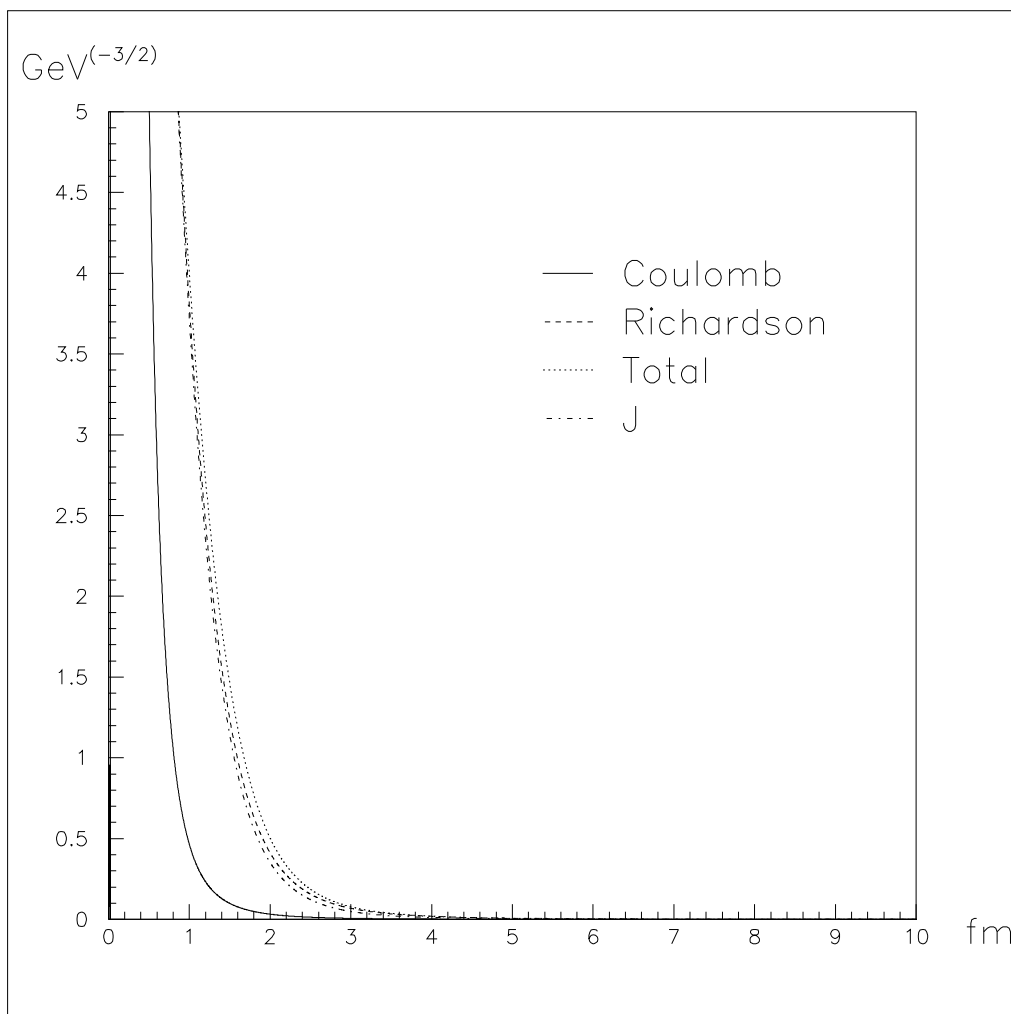
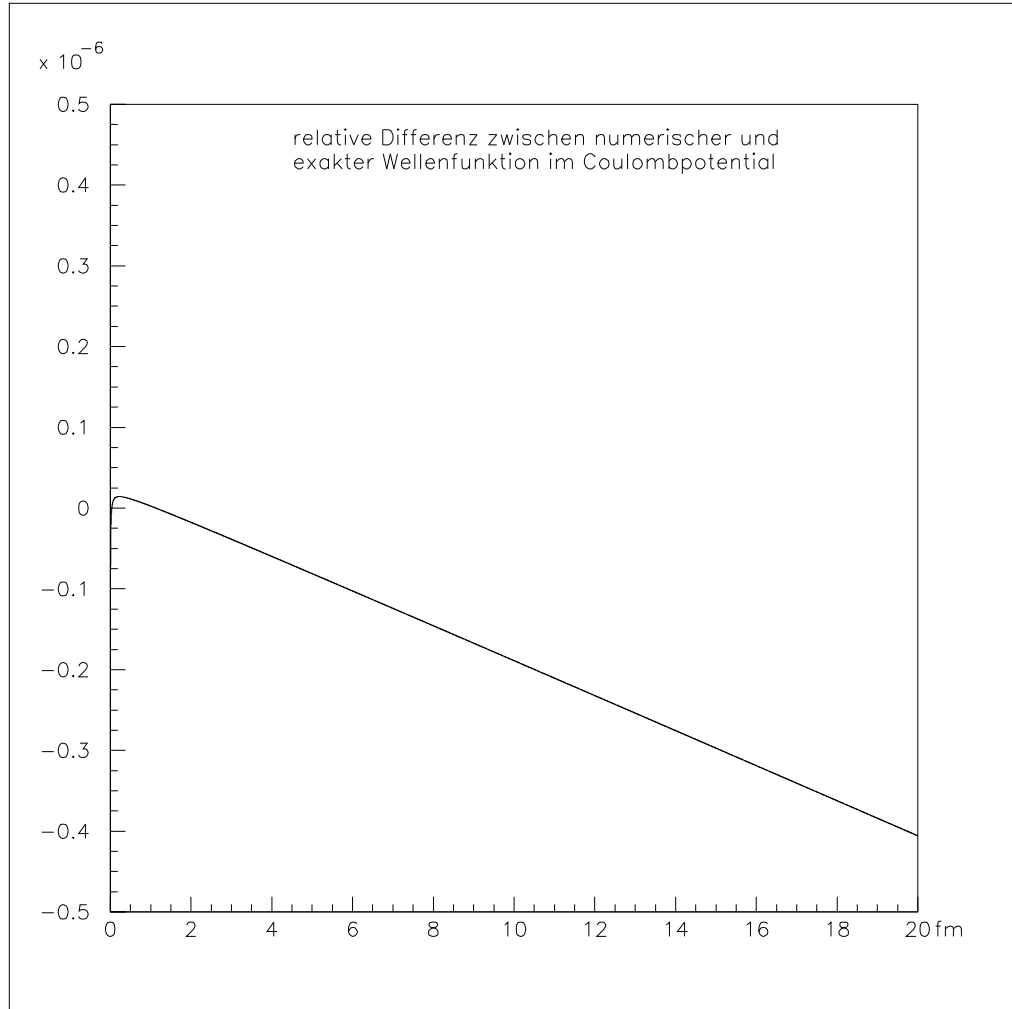


Abbildung B.5: Impulsraumwellenfunktionen (Grundzustand) - Lösungen der Schrödingergleichung im Impulsraum mit den entsprechenden Potentialen und den unten angegebenen Quarkmassen

Die Quarkmassen sind:

| Potential  | $m_b / \text{GeV}$ | $m_c / \text{GeV}$ |
|------------|--------------------|--------------------|
| Coulomb    | 4,750              | 1,563              |
| Richardson | 4,918              | 1,491              |
| Total      | 5,255              | 1,900              |
| J          | 4,731              | 1,323              |

Im Falle des Coulombpotentials ( $m_1 = 4,75$  GeV und  $m_2 = 1,563$  GeV) stellt sich der relative Fehler  $\frac{\phi_{num.}(r) - \phi_{exakt}(r)}{\phi_{num.}(r) + \phi_{exakt}(r)}$  zwischen numerischer und exakter Wellenfunktion folgendermaßen dar:



Im Vergleich zu allen anderen Unsicherheiten ist diese in den Rechnungen also unbedeutend.

# Literaturverzeichnis

- [1] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. British Royal Society, 1686.
  - [2] J. C. Maxwell. *Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press series, Oxford, 1873.
  - [3] M. E. L. Planck. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Ann. d. Phys.*, 1:719, Dec 1900.
  - [4] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. d. Physik und Chemie*, 17:891–921, 1905.
  - [5] O. Nachtmann. *Elementarteilchenphysik - Phänomene und Konzepte*. Vieweg, Braunschweig, 1986.
  - [6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1995.
  - [7] S. Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields - Volume II Modern Applications*. Cambridge University Press, Cambridge“, 1996.
  - [8] T. Ohl. Drawing Feynman diagrams with Latex and Metafont. *Comput. Phys. Commun.*, 90:340–354, 1995.
  - [9] S. L. Glashow. Partial symmetries of weak interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
  - [10] H. Georgi and S. L. Glashow. Unified weak and electromagnetic interactions without neutral currents. *Phys. Rev. Lett.*, 28:1494, 1972.
  - [11] A. Salam. Weak and electromagnetic interactions. Originally printed in \*Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden\*, Stockholm 1968, 367-377.
  - [12] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
-

- [13] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particle Physics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chicester, Brisbane, Torontto, Singapore, 1987.
  - [14] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, 1962.
  - [15] P. W. Higgs. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Phys. Rev.*, 145:1156–1163, 1966.
  - [16] J. H. Kühn, J. Kaplan, and El G. O. Safiani. Electromagnetic annihilation of  $e^+ e^-$  into quarkonium states with even charge conjugation. *Nucl. Phys.*, B157:125, 1979.
  - [17] S. Recksiegel. In einem Vortrag am TTP im Sommersemester 2002 in Karlsruhe.
  - [18] S. S. Gershtein, V. V. Kiselev, A. K. Likhoded, and A. V. Tkabladze. Physics of  $B_c$  mesons. *Phys. Usp.*, 38:1–37, 1995.
  - [19] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistische Quantenmechanik*. Spektrum, Heidelberg, 1964/1998.
  - [20] S. Weinberg. *The Quantum Theory Of Fields - Volume I Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
  - [21] V. A. Novikov et al. Charmonium and gluons: Basic experimental facts and theoretical introduction. *Phys. Rept.*, 41:1–133, 1978.
  - [22] K. Hagiwara et al. Review of particle physics. *Phys. Rev.*, D66:010001, 2002.
  - [23] E. J. Eichten and C. Quigg. Mesons with beauty and charm: Spectroscopy. *Phys. Rev.*, D49:5845–5856, 1994.
  - [24] K. Anikeev et al. B physics at the Tevatron: Run II and beyond. 2001.
  - [25] C. Itzykson and J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, International Edition, 1985.
  - [26] F. Abe et al. Observation of the  $B_c$  meson in  $p$  anti- $p$  collisions at  $s^{**}(1/2) = 1.8\text{-TeV}$ . *Phys. Rev. Lett.*, 81:2432–2437, 1998.
  - [27] J. A. M. Vermaseren. New features of FORM. 2000.
  - [28] E. Byckling and K. Kajantie. *Particle Kinematics*. John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973.
-

- 
- [29] N. Isgur, D. Scora, B. Grinstein, and M. B. Wise. Semileptonic B and D decays in the quark model. *Phys. Rev.*, D39:799, 1989.
- [30] G. P. Lepage. A New Algorithm For Adaptive Multidimensional Integration. *J. Comput. Phys.*, 27:192, 1978.
- [31] G. P. Lepage. Vegas: An Adaptive Multidimensional Integration Program. CLNS-80/447.
- [32] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and Tung-Mow Yan. Charmonium: Comparison with experiment. *Phys. Rev.*, D21:203, 1980.
- [33] S. N. Jena, S. Panda, and J. N. Mohanty. Mesonic M1 transitions in a relativistic potential model of independent quarks. *J. Phys.*, G24:1869–1880, 1998.
- [34] L. Fox. *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Pergamon Press, New York, Oxford, London, Paris, 1962.
- [35] R. Butler and E. Kerr. *An Introduction to Numerical Methods*. Sir Isaac Pitman Sons Ltd., London.
- [36] J. L. Richardson. The heavy quark potential and the Upsilon, J / Psi systems. *Phys. Lett.*, B82:272, 1979.
- [37] J. H. Kühn and S. Ono. Production and decay of toponium P states. *Z. Phys.*, C21:395, 1984.
- [38] K. Igi and S. Ono. Heavy quarkonium systems and the QCD scale parameter Lambda MS. *Phys. Rev.*, D33:3349, 1986.
- [39] J. H. Kühn and P. M. Zerwas. The toponium scenario. *Phys. Rept.*, 167:321, 1988.
- [40] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin. Weak decays of the Bc meson to charmonium and D mesons in the relativistic quark model. 2003.
- [41] M. A. Ivanov, J. G. Körner, and P. Santorelli. The semileptonic decays of the Bc meson. *Phys. Rev.*, D63:074010, 2001.
- [42] V. V. Kiselev, A. K. Likhoded, and A. I. Onishchenko. Semileptonic Bc meson decays in sum rules of QCD and nrQCD. *Nucl. Phys.*, B569:473–504, 2000.
-

- [43] A. Abd El-Hady, J. H. Munoz, and J. P. Vary. Semileptonic and non-leptonic Bc decays. *Phys. Rev.*, D62:014019, 2000.
  - [44] Ch.-H. Chang and Y.-Q. Chen. The decays of Bc meson. *Phys. Rev.*, D49:3399–3411, 1994.
  - [45] P. Colangelo and F. De Fazio. Using heavy quark spin symmetry in semileptonic Bc decays. *Phys. Rev.*, D61:034012, 2000.
  - [46] A. Yu. Anisimov, P. Yu. Kulikov, I. M. Narodetsky, and K. A. Ter-Martirosian. Exclusive and inclusive decays of the Bc meson in the light-front ISGW model. *Phys. Atom. Nucl.*, 62:1739–1753, 1999.
  - [47] M. A. Nobes and R. M. Woloshyn. Decays of the Bc meson in a relativistic quark-meson model. *J. Phys.*, G26:1079–1094, 2000.
-

# Danksagungen

Zuerst möchte ich Herrn Prof. Johann H. Kühn dafür danken, dass er mir mit dieser Arbeit eine gleichermaßen interessante wie aktuelle Aufgabe gestellt hat und dafür, dass er „gordische Knoten“ des Unverständnisses stets mit wenigen, klaren und präzisen Worten lösen konnte.

Ebenso möchte ich Herrn Prof. Thomas Mannel für die Übernahme des Korreferates danken.

Besonders danken möchte ich auch Dr. Peter Uwer, der - obwohl und gerade weil dieses Thema nicht im Zentrum seines eigenen Forschungsgebietes steht - viel Zeit in die Betreuung investiert hat, und mir auch in Detailfragen stets weiter helfen konnte. Ich kann mir kaum vorstellen, dass es Fehler, Schlampereien und mangelhafte Argumentationsketten gibt, die er nicht findet.

So knifflig die physikalischen Probleme auch sein mögen, die „conditio sine qua non“ am TTP sind funktionierende Computer. Hier gilt mein Dank besonders Michael Faisst und Christian Sturm, die aufgetretene Probleme immer sofort gelöst haben. Aber auch Bernd Feucht, Tom Hansmann, Martin Melcher und Michael Kraetz waren häufig mit nützlichen Tipps zur Stelle.

Besonders in der Anfangsphase waren die physikalischen Erklärungen und Diskussionen mit Bernd und Christian sehr hilfreich. So hat z.B. der Anhang über den Phasenraum seinen Ursprung in einer Erklärung von Christian.

Bewusst offen lassend auf wen was zutrifft, bin ich sehr dankbar dafür, dass auch Andreas Arnold, Heike Boos, Christine Bruch, Stefan Bekavac, Tobias Huber, Kristof Köhler, Michael Kraetz, Martin Melcher, Andreas Roß, Joscha Sauer, Andreas „Ich sitze hier im Phasenraum...“ Scharf und Peter Schlaile immer gute Tipps, positive Stimmung, schrägen Humor und Zeit für

---

Diskussionen übrig hatten. ;)

Dem Cusanuswerk möchte ich für die finanzielle und besonders die ideelle Unterstützung und Förderung danken.

Schließlich und nicht zuletzt danke ich meiner Familie und meinen Freunden für Verständnis, Förderung, Ruhe, Abwechslung ...



Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Karlsruhe, den

Tobias Kretz